الجبر الخطي ومبادئ الإحصاء والاحتمالات

السنة الأولى

قسم الفيزياء

منشورات جامعة دمشق
كلية العلوم

الجبر الخطي ومبادئ الإحصاء والاحتمالات

الدكتورة
ريما مأمون القمحة
مدرس في قسم الرياضيات

جامعة دمشق

فهرس المحتويات

المقدمة

وضع هذا الكتاب لكي يغطي المبادئ الأساسية في الجبر الخطي والإحصاء والاحتمالات لطلاب السنة الأولى في قسم الفيزياء في كلية العلوم في جامعة دمشق، كما إنه يصلح لأن يكون مرجعاً مهماً لما يحتويه من معلومات أساسية ومفيدة لكل مهتم وقارئ.

لقد حاولت جاهدة سرد مواضيع هذا الكتاب بطريقة سهلة ومسلسلة بحيث تصل المعلومات إلى الطالب بيسر ودون تشويش كي يتمكن من فهمها واتقانها.

وعالجت في هذا الكتاب تسعة فصول:

ففي الفصل الأول عرضت المصفوفات والعمليات عليها، وأهم أنواعها، والتحويلات الأولية عليها.

وفي الفصل الثاني شرحت المحددات، وخواصها، وكيفية استخدامها في إيجاد مقلوب مصفوفة.

وفي الفصل الثالث تطرقت إلى المعادلات الخطية، وبعض الطرائق المستخدمة في حلها، وأيضاً استخدام المصفوفات في حلها.

وفي الفصل الرابع تحدثت عن القيم الذاتية للمصفوفة، والأشعة الذاتية لها، والحدودية المميزة، والأصغرية.

وفي الفصل الخامس استعرضت مفاهيم علم الإحصاء، وقدمت شرحاً حول الجداول التكرارية والنسبية والمئوية.

وخصصت الفصل السادس للحديث عن أساسيات علم الاحتمال، ومفاهيمه وطرق العد.

وفي الفصل السابع تحدثت عن المتغيرات العشوائية المنفصلة والمستمرة وتوزيعاتها الاحتمالية.

وتحدثت في الفصل الثامن عن أهم التوزيعات الاحتمالية المنفصلة، واستعرضت بعضاً من خصائصها مثل التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري.

وقدمت في الفصل التاسع شرحاً لأشهر التوزيعات الاحتمالية المستمرة، مثل التوزيع الطبيعي، والطبيعي المعياري، والتوزيع المنتظم، والتوزيع الأسي، وتوزيع (كاي مربع)، وتوزيع (ستودينت)، وذلك نظراً لأهميتهم في التطبيقات العملية، كما قدمت بعضاً من خصائصها.

وفي الملحق عرضت أهم جداول التوزيع الاحتمالي، مثل جدول التوزيع الاحتمالي الطبيعي، وتوزيع (كاي مربع) وتوزيع (ستيودنت).

وبعد:

فإنني أرجو أن يكون هذا الكتاب عوناً لكل طالب ودارس ومهتم في مجال الرياضيات.

والله ولي التوفيق

المؤلفة

د. ريما القمحة

الفصل الأول

المصفوفات

1- مقدمة

تعد المصفوفات (Matrices) أداة رياضية أساسية لدراسة مواضيع مختلفة في الحياة العملية. ففي مجال الاتصالات تقوم بدور كبير في عملية التشفير، وسرية المعلومات اعتماداً على التحويلات الخطية.

وفي الاقتصاد تستخدم كنموذج لتحديد الأسعار. كما تستخدم المصفوفات في نماذج النمو السكاني؛ لتمثيل البيانات في العالم الحقيقي.

وفي علم الاحتمال، تستخدم (مصفوفة ماركوف) الانتقالية في سلاسل (ماركوف) لتقدير الحركة عبر الزمن، حيث يتم التعبير عن احتمال الانتقال من حالة إلى حالة أخرى. وفي الفيزياء تستخدم المصفوفات لدراسة الدارات الكهربائية، وميكانيك الكم، والبصريات.

وفي التطبيقات الحاسوبية، تلعب المصفوفات دوراً هاماً في إسقاط صورة ثلاثية الأبعاد على شاشة ثنائية الأبعاد، وإعطاء حركات للصورة بحيث تبدو حقيقية. وتستخدم المصفوفات لترتيب صفحات الويب، عند استخدام محرك البحث Google.

وفي مجال الروبوتات والأتمتة تعد المصفوفات من العناصر الأساسية لتمثيل حركة الروبوت. أما في علم الجيولوجيا، فتستخدم المصفوفات لإجراء المسح الزلزالي.

2- تعريف المصفوفة

لتكن F مجموعة غير خالية، ولتكن المجموعتان A , B الجزئيتان من مجموعة الأعداد الطبيعية N حيث:

$$A = \{1, 2, \dots, m\}$$
$$B = \{1, 2, \dots, n\}$$

وليكن التطبيق:

$$f: A \times B \to F$$

المعرف بـ $f(i,j) = a_{ij}$.

إن مجموعة صور عناصر المنطلق هي:

$$F(A \times B) = \{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}\}$$

ونرتب هذه العناصر في m سطر و n عمود بين قوسين كما يلي:

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

تسمى هذه الصيغة بالمصفوفة A من المرتبة $m \times n$ ، حيث:

يدل العدد m على عدد الأسطر (Row)، ويدل العدد n على عدد الأعمدة (Column)، فالمصفوفة هي أي ترتيب مستطيل لمجموعة من العناصر على هيئة صفوف وأعمدة.

يحدد كل عنصر a_{ij} في المصفوفة بوساطة دليلين، الأول يرمز لرقم السطر الذي يقع فيه العنصر، والثاني يرمز لرقم العمود الواقع فيه ذلك العنصر. فمثلاً: العنصر a_{23} يقع في السطر الثاني والعمود الثالث.

ونرمز لمجموعة كل المصفوفات من المرتبة $m \times n$ على المجموعة F بالرمز $M_{m\times n}(F)$.

سنقتصر في دراستنا على المصفوفات المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية R ومجموعة الأعداد العقدية C .

إذا كانت $F = R$ مجموعة الأعداد الحقيقية، فإن: $M_{m\times n}(R)$ هي مجموعة المصفوفات الحقيقية من المرتبة $m \times n$.

إذا كانت $F = C$ مجموعة الأعداد العقدية، فإن: $M_{m\times n}(C)$ هي مجموعة المصفوفات العقدية من المرتبة $m \times n$.

3- بعض المصفوفات الخاصة

- **المصفوفة السطرية:**

هي مصفوفة مؤلفة من سطر واحد، وعدة أعمدة. من الأمثلة على المصفوفة السطرية ما يلي:

$$A = [1 \quad -4 \quad 2] \quad , \quad B = [-3 \quad 7 \quad 8 \quad -9]$$

- **المصفوفة العمودية:**

هي مصفوفة مؤلفة من عمود واحد وعدة أسطر. من الأمثلة على المصفوفة العمودية ما يلي:

$$B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \ , \ A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

- **المصفوفة الصفرية**

إن المصفوفة الصفرية (Zero Matrix) هي مصفوفة جميع عناصرها أصفار. يرمز للمصفوفة الصفرية من المرتبة $m \times n$ بـ $0_{m\times n}$. إن كلاً مما يلي يعد مثالاً على المصفوفة الصفرية.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **المصفوفة المربعة**

المصفوفة المربعة (Square Matrix) مصفوفة يكون فيها عدد الأسطر يساوي عدد الأعمدة، وبالتالي نقول عن مصفوفة $A \in M_{m\times n}(F)$ إنها مربعة عندما وفقط عندما $m = n$.

نرمز لمجموعة المصفوفات المربعة على المجموعة F بالرمز $M_n(F)$.

- **المصفوفة القطرية**

المصفوفة القطرية (Diagonal Matrix) مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار، ما عدا عناصر القطر الرئيسي، وبالتالي نقول عن مصفوفة مربعة $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$ إنها قطرية عندما وفقط عندما:

$$a_{ij} = 0 \qquad \forall i \neq j$$

فالمصفوفة القطرية لها الشكل:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

كما تكتب بالشكل المختصر التالي:

$$A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

- **المصفوفة السلّمية**

إن المصفوفة السلّمية (Scalar Matrix) هي مصفوفة قطرية تكون عناصر القطر الرئيسي فيها متساوية.

إن كلاً من A و B أمثلة على المصفوفة السلمية:

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- **المصفوفة الواحدية**

المصفوفة الواحدية (Identity Matrix) هي مصفوفة سلّمية تكون جميع عناصر القطر الرئيسي فيها تساوي الواحد، ويرمز للمصفوفة الواحدية من المرتبة n بـ I_n.

إن كلاً مما يلي يعد مثالاً على المصفوفة الواحدية.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **المصفوفة المثلثية**

إن المصفوفة المثلثية (Triangular Matrix) هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها الواقعة فوق القطر الرئيسي، أو تحته تساوي الصفر.

نقول عن مصفوفة مربعة $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$ إنها مثلثية عليا (Upper Triangular Matrix) إذا كانت كل عناصرالمصفوفة تحت القطر الرئيسي أصفاراً، أي:

$$a_{ij} = 0 \quad \forall\, i > j$$

ومنه المصفوفة المثلثية العليا A لها الشكل التالي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ونقول عن A إنها مصفوفة مثلثية دنيا (Lower Triangular Matrix) إذا كانت كل عناصر المصفوفة فوق القطر الرئيسي أصفاراً، أي:

$$a_{ij} = 0 \quad \forall\, i < j$$

ومنه المصفوفة المثلثية الدنيا A لها الشكل التالي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

4- تساوي المصفوفات

نقول عن مصفوفتين $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(F)$ و $B = (b_{ij}) \in M_{s\times t}(F)$ إنهما متساويتان (Equal Matrices) إذا:

1. كانتا من المرتبة نفسها، أي $m = s$ و $n = t$.
2. كل عنصر من A يساوي العنصر المقابل له من B، أي $a_{ij} = b_{ij}$ مهما تكن i و j حيث: $1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$.

مثال (1) :

ليكن لدينا:

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

أوجد قيم a و b وc و d التي تجعل $A = B$؟

الحل:

لكي يكون $A = B$ ، فإنه يجب أن يكون:

$a = 1$ و $b = 0$ و $c = -4$ و $d = 2$.

5- العمليات على المصفوفات

5-1 جمع المصفوفات

الشرط اللازم والكافي لجمع مصفوفتين (Addition of Matrices):

$$A = (a_{ij}) \quad \text{و} \quad B = (b_{ij})$$

كل منهما معرف على المجموعة F هو أن تكونا من مرتبة واحدة $m \times n$، عندئذ فإن الناتج مصفوفة جديدة $C = (c_{ij})$ من المرتبة $m \times n$ ، بحيث:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad 1 \le i \le m \qquad , 1 \le j \le n$$

ونكتب ذلك على الشكل:

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

مثال (2):

ليكن لدينا:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -2 & 7 & 7 \\ -4 & 8 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 9 \\ 9 & 10 & -2 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

أوجد $A + B$؟

الحل:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 9 \\ 9 & 10 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -2 & 7 & 7 \\ -4 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 3 & 13 & 16 \\ 5 & 18 & 2 \end{bmatrix}$$

2-5 طرح المصفوفات

الشرط اللازم والكافي لطرح مصفوفتين (Subtraction of Matrices):

$$B = (b_{ij}) \quad \text{و} \quad A = (a_{ij})$$

كل منهما معرف على المجموعة F هو أن تكونا من مرتبة واحدة $m \times n$، عندئذ فإن الناتج هو مصفوفة جديدة $C = (c_{ij})$ من المرتبة $m \times n$ بحيث:

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \quad 1 \le i \le m \quad , \quad 1 \le j \le n$$

ونكتب ذلك على الشكل:

$$A - B = A + (-B)$$

$$= (a_{ij}) + (-b_{ij})$$

$$= (a_{ij} - b_{ij})$$

مثال (3):

ليكن لدينا:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -2 & 7 & 7 \\ -4 & 8 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 9 \\ 9 & 10 & -2 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

أوجد $A - B$؟

الحل:

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 9 \\ 9 & 10 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -2 & 7 & 7 \\ -4 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 7 & -1 & 2 \\ 13 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

3-5 الجداء السلمي لمصفوفة

لتكن المصفوفة $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(F)$ ، وليكن العدد $\lambda \in F$. تعرف المصفوفة $\lambda.A$ على أنها المصفوفة الناتجة عن A بضرب كل عنصر من عناصر A بالعدد λ ،أي:

$$\lambda.A = \lambda\left(a_{ij}\right) = (\lambda a_{ij})$$

ويلاحظ أن $\lambda.A$ لها نفس مرتبة A.

بعض خواص المصفوفات:

$$\forall\ A\ ,B\ ,C\ \in M_{m\times n}(F), \quad \forall\, \alpha\,,\beta\ \in F$$

فإن:

- عملية جمع المصفوفات عملية تبديلية أي:

$$A + B = B + A$$

- عملية جمع المصفوفات عملية تجميعية أي:

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

- المصفوفة الصفرية عنصر حيادي بالنسبة لجمع المصفوفات أي:

$$A+0_{m\times n}=0_{m\times n}+A=A$$

- لكل مصفوفة A نظير بالنسبة لجمع المصفوفات هو $-A$ أي:

$$A+(-A)=(-A)+A=0_{m\times n}$$

- $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta B$
- $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$
- $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
- $1.A=A$، حيث $1\in F$
- $0.A=0$، حيث $0\in F$

مثال (4):

لتكن لدينا المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 0 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

أوجد $2A$ و $-3A$؟

الحل:

$$2A=2\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 0 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 6\\ 0 & 2\\ 8 & 4\end{bmatrix}$$

و

$$-3A=-3\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 0 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -9\\ 0 & -3\\ -12 & -6\end{bmatrix}$$

4-5 جداء المصفوفات

لتكن المصفوفتان A وB المعرفتان على المجموعة F، حيث $A = (a_{ij})$ من المرتبة $m \times n$، و$B = (b_{ij})$ من المرتبة $n \times q$، أي أن عدد أعمدة المصفوفة A يساوي عدد أسطر المصفوفة B.

يعرّف حاصل ضرب A. B (Multiplication of Matrices) على أنه مصفوفة جديدة $C = (c_{ij})$ من المرتبة $m \times q$ و معرفة على الحقل F بحيث:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}\, b_{kj} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \cdots + a_{in}\, b_{nj}$$

و ذلك من أجل جميع قيم $j = 1, 2, \dots, n$ $\quad i = 1, 2, \dots, m$

يمكن توضيح ذلك بالشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \boxed{a_{i1} \quad \cdots \quad a_{in}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & \boxed{b_{1j}} & \cdots & b_{1q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & \boxed{b_{nj}} & \cdots & b_{nq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1q} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mq} \end{bmatrix}$$

إن العنصر c_{ij} من المصفوفة C، والواقع في السطر i والعمود j، هو حاصل جمع ناتج ضرب عناصر السطر i من المصفوفة A بمقابلاتها من عناصر العمود j من المصفوفة B.

مثال (5):

أوجد AB للمصفوفتين التاليتين:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1\times 5+2\times 4 & 1\times 3+2\times 1 & 1\times(-2)+2\times 2 \\ 3\times 5+(-1)\times 4 & 3\times 3+(-1)\times 1 & 3\times(-2)+(-1)\times 2 \\ 2\times 5+5\times 4 & 2\times 3+5\times 1 & 2\times(-2)+5\times 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 13 & 5 & 2 \\ 11 & 8 & -8 \\ 30 & 11 & 6 \end{bmatrix}$$

بعض خواص المصفوفات:

- ضرب المصفوفات عملية غير تبديلية، أي:

$$\forall\, A, B \in M_n(F)$$

فإن:

$$AB \neq BA$$

- ضرب المصفوفات عملية تجميعية، أي:

$$\forall\, A \in M_{m\times n}(F)\,,\quad \forall B \in M_{n\times t}(F)\,,\quad \forall C \in M_{t\times s}(F)$$

فإن:

$$(AB)C = A(BC)$$

- $\forall\, A \in M_{m\times n}(F), \forall\, B, C \in M_{n\times t}(F)$ فإن:

$$A(B+C) = AB + AC$$

- $\forall\, A \in M_{m\times n}(F),\ \forall B \in M_{n\times t}(F), \forall\, \alpha \in F$ فإن:

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$$

- $\forall\, A, I_n \in M_n(F)$ فإن:

$$AI_n = I_nA = A$$

6- منقول مصفوفة

إن منقــول المصــفوفة (Matrix Transpose) $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(F)$ هو المصفوفة الناتجة عن تبديل أسطر المصفوفة A بأعمدتها مع المحافظة على الترتيب نفسه، ويرمز له بالرمز A^T ، حيث:

$$A^T = (a_{ji}) \in M_{n\times m}(F)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2m} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال (6):

إذا كانت المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

أوجد A^T؟

الحل:

إن المنقول A^T ينتج عن A بجعل الأعمدة سطوراً، أي:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

تصبح:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -6 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

ملاحظات حول المنقول:

1. منقول مصفوفة سطرية هو مصفوفة عمودية والعكس صحيح، أي أن منقول مصفوفة عمودية هو مصفوفة سطرية .
2. منقول مصفوفة مربعة من المرتبة n هو مصفوفة مربعة أيضاً من المرتبة n.

بعض خواص المصفوفات:

$$\forall A, B \in M_{m\times n}(F),\ \ \forall C \in M_{n\times p}(F)\ ,\ \forall k \in F$$

فإن:

- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(AC)^T = C^T A^T$
- $(A^T)^T = A$
- $(kA)^T = k\,A^T$

7- المصفوفة المتناظرة

تكون المصفوفة الحقيقية المربعة $A \in M_n(R)$ متناظرة (Symmetric Matrix) إذا وفقط إذا كان:

$$A^T = A$$

أي عندما:

$$a_{ji} = a_{ij}\ \ ,\ i\ ,\ j = 1,2,\dots,n$$

مثال (7):

إذا كانت المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 4 & 5 \\ b & c & 6 \end{bmatrix}$$

مصفوفة متناظرة، فأوجد قيم a و b و c ؟

الحل:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 2 & 4 & c \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

وبما أن A مصفوفة متناظرة، فإن $A^T = A$، أي:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 2 & 4 & c \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 4 & 5 \\ b & c & 6 \end{bmatrix}$$

ومنه:

$$a = 2$$
$$b = 3$$
$$c = 5$$

8- المصفوفة المتناظرة المتخالفة

تكون المصفوفة الحقيقية المربعة $A \in M_n(R)$ متناظرة متخالفة (Skew − Symmetric Matrix) إذا وفقط إذا كان:

$$A^T = -A$$

أي عندما:

$$a_{ji} = -a_{ij} \ , \quad i,j = 1,2,\dots,n$$

ملاحظة:

عناصر القطر الرئيسي لمصفوفة متناظرة متخالفة هي أصفار.

مثال (8):

إذا كانت المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & 0 & 3 \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$$

مصفوفة متناظرة متخالفة، فأوجد قيم a و b و c ؟

الحل:

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 1 & 0 & c \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

بما أن A مصفوفة متناظرة متخالفة، فإن $A^T = -A$، أي:

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 1 & 0 & c \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & 0 & 3 \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$$

ومنه:

$$a = -1$$
$$b = -2$$
$$c = -3$$

9- مرافق مصفوفة

لتكن $A = (a_{ij}) \in M_{n\times m}(C)$ مصفوفة عقدية، عندئذ المصفوفة المرافقة (Conjugate of a Matrix) للمصفوفة A هي المصفوفة:

$$\overline{A} = (\overline{a}_{ij}) \in M_{n\times m}(C)$$

حيث $\overline{a}_{ij}$ هو المرافق العقدي للعدد a_{ij} .

ملاحظة:

إذا كان $Z = a + i\,b \in C$ فإن $\overline{Z} = a - i\,b$.

مثال (9):

إذا كانت المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 2-3i & -4+7i \\ 9i & -12 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

أوجد $\overline{A}$؟

الحل:

إن مرافق مصفوفة A هو:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 2+3i & -4-7i \\ -9i & -12 \end{bmatrix}$$

10- المصفوفة الهرميتية

تكون المصفوفة العقدية المربعة $A \in M_n(C)$ هرميتية (Hermitian Matrix) إذا وفقط إذا كان:

$$\left(\overline{A}\right)^T = A$$

أي:

$$\bar{a}_{ji} = a_{ij} \ , \quad i,j = 1,2,\dots,n$$

نرمز لـ $\left(\overline{A}\right)^T$ بالرمز A^*.

ملاحظة:

عناصر القطر الرئيسي لمصفوفة هرميتية هي أعداد حقيقية.

مثال (10):

إذا كانت المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4-6i & 5+2i \\ 4+6i & 2 & 3-4i \\ 5-2i & 3+4i & 1 \end{bmatrix}$$

أثبت أنها هرميتية؟

الحل:

نوجد أولاً مرافق المصفوفة A:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4+6i & 5-2i \\ 4-6i & 2 & 3+4i \\ 5+2i & 3-4i & 1 \end{bmatrix}$$

ثم نوجد منقول المصفوفة $\overline{A}$:

$$\left(\overline{A}\right)^T = \begin{bmatrix} 1 & 4-6i & 5+2i \\ 4+6i & 2 & 3-4i \\ 5-2i & 3+4i & 1 \end{bmatrix}$$

بالمقارنة نجد أن $\left(\overline{A}\right)^T = A$، والمصفوفة A هرميتية.

11- المصفوفة الهرميتية المتخالفة

تكون المصفوفة العقدية المربعة $A \in M_n(C)$ هرميتية متخالفة (Skew Hermitian Matrix) إذا وفقط إذا كان:

$$\left(\overline{A}\right)^T = -A$$

أي عندما:

$$\bar{a}_{ji} = -a_{ij} \quad , \quad i,j = 1,2,\dots,n$$

مثال (11):

إذا كانت المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 3i & 3+4i & 4-5i \\ -3+4i & -4i & 5+6i \\ -4-5i & -5+6i & 0 \end{bmatrix}$$

أثبت أنها هرميتية مخالفة؟

الحل:

نوجد أولاً مرافق المصفوفة A:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} -3i & 3-4i & 4+5i \\ -3-4i & +4i & 5-6i \\ -4+5i & -5-6i & 0 \end{bmatrix}$$

ثم نوجد منقول المصفوفة $\overline{A}$:

$$\left(\overline{A}\right)^T = \begin{bmatrix} -3i & -3-4i & -4+5i \\ 3-4i & +4i & -5-6i \\ 4+5i & 5-6i & 0 \end{bmatrix}$$

نوجد $(-A)$:

$$-A = -\begin{bmatrix} -3i & -3-4i & -4+5i \\ 3-4i & +4i & -5-6i \\ 4+5i & 5-6i & 0 \end{bmatrix}$$

بالمقارنة نجد أن: $\left(\overline{A}\right)^T = -A$.

مبرهنة (1):

يمكن التعبير بصورة وحيدة عن كل مصفوفة مربعة $A \in M_n(R)$ كمجموع مصفوفتين إحداهما مصفوفة متناظرة S والأخرى مصفوفة متناظرة متخالفة T، حيث:

$$T = \frac{1}{2}(A - A^T) \quad و \quad S = \frac{1}{2}(A + A^T)$$

مثال (12):

إذا كانت المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

اكتب A كمجموع مصفوفتين إحداهما متناظرة والأخرى متناظرة متخالفة؟

الحل:

نوجد أولاً مرافق المصفوفة A:

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{1}{2}(A + A^T)$$

$$S = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن المصفوفة S متناظرة. تأكد من ذلك.

$$T = \frac{1}{2}(A - A^T)$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن المصفوفة T متناظرة متخالفة. تأكد من ذلك.

ومنه:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

مبرهنة (2):

يمكن التعبير بصورة وحيدة عن كل مصفوفة عقدية مربعة $A \in M_n(C)$ كمجموع مصفوفتين إحداهما مصفوفة هرميتية S والأخرى مصفوفة هرميتية متخالفة T حيث:

$$T = \frac{1}{2}\left(A - \left(\overline{A}\right)^T\right) \quad و \quad S = \frac{1}{2}(A + A^T)$$

مثال (13):

إذا كانت المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1-2i & 2 & 2i \\ 1-i & i & 1-i \\ -1 & 3i & 1 \end{bmatrix}$$

اكتب A كمجموع مصفوفتين إحداهما هرميتية، والأخرى هرميتية متخالفة؟

الحل:

نوجد أولاً: مرافق المصفوفة A:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1+2i & 2 & -2i \\ 1+i & -i & 1+i \\ -1 & -3i & 1 \end{bmatrix}$$

ثم نوجد منقول المصفوفة $\overline{A}$:

$$\left(\overline{A}\right)^T = \begin{bmatrix} 1+2i & 1+i & -1 \\ 2 & -i & -3i \\ -2i & 1+i & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{1}{2}(A + \left(\overline{A}\right)^T)$$

وبالتالي:

$$S=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1-2i & 2 & 2i \\ 1-i & i & 1-i \\ -1 & 3i & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1+2i & 1+i & -1 \\ 2 & -i & -3i \\ -2i & 1+i & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$S=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 3+i & -1+2i \\ 3-i & 0 & 1-4i \\ -1-2i & 1+4i & 2 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن المصفوفة S هرميتية. تأكد من ذلك.

$$T=\frac{1}{2}(A-(\bar{A})^T)$$

$$T=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1-2i & 2 & 2i \\ 1-i & i & 1-i \\ -1 & 3i & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1+2i & 1+i & -1 \\ 2 & -i & -3i \\ -2i & 1+i & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$T=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4i & 1-i & 1+2i \\ -1-i & 2i & 1+2i \\ -1+2i & -1+2i & 0 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن المصفوفة T هرميتية متخالفة. تأكد من ذلك.

ومنه:

$$A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 3+i & -1+2i \\ 3-i & 0 & 1-4i \\ -1-2i & 1+4i & 2 \end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4i & 1-i & 1+2i \\ -1-i & 2i & 1+2i \\ -1+2i & -1+2i & 0 \end{bmatrix}$$

12- أثر المصفوفة

إن أثر المصفوفة (Trace of Matrix) المربعة $A \in M_n(F)$ هو مجموع عناصر قطرها الرئيسي، ونرمز له بالرمز $Tr(A)$. ومنه:

$$Tr(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$$

مثال (14):

إذا كانت المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$$

أوجد أثر المصفوفة السابقة.

الحل:

إن أثر المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$$

هو:

$$Tr(A) = 1 + 6 + 11 = 18.$$

خواص:

$$\forall A, B \in M_n(F) \quad , \quad \forall k \in F$$

فإن:

- $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$
- $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$
- $Tr(A^T) = Tr(A)$

13- قوى مصفوفة

لتكن المصفوفة المربعة $A \in M_n(F)$، إن قوى المصفوفة A (Matrix Poweres) تحسب كما يلي:

$$A^0 = I_n$$
$$A^1 = A$$
$$A^2 = AA$$
$$A^3 = AAA = A^2A = AA^2$$
$$\dots$$
$$A^k = \underbrace{A.A \dots .A}_{k \text{ مرة}}$$

ملاحظة

لتكن المصفوفة المربعة $A \in M_n(F)$، وليكن العددان الطبيعيان k و l عندئذ:

$$A^k A^l = A^{k+l} \quad \text{و} \quad \left(A^k\right)^l = A^{kl}$$

مثال (15):

لتكن المصفوفة المربعة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

أوجد كلاً من A^0 و A^1 و A^2 و A^3 ؟

الحل:

$$A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^1 = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$$

13-1 تعريف

لتكن $A \in M_n(F)$، فإن:

1. A مصفوفة خاملة إذا كانت:

$$A^2 = A$$

2. A مصفوفة دورية إذا وجد عدد طبيعي موجب $r > 0$ بحيث:

$$A^r = I_n$$

إن أصغر عدد طبيعي موجب r يحقق هذا الشرط يسمى دور المصفوفة A.

3. A مصفوفة عدومة إذا وجد عدد طبيعي موجب $p > 0$ بحيث:

$$A^p = 0_n$$

إن أصغر عدد طبيعي موجب p يحقق هذا الشرط يسمى مرتبة انعدامية المصفوفة A.

مثال (16) :

أثبت أن المصفوفة التالية خاملة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A$$

مثال (17):

بَين أن المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

دورية وبين دورها؟

الحل:

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

وبالتالي A دورية، ودورها $r = 4$.

مثال (18):

أثبت أن المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$$

عدومة، وأوجد مرتبة انعدامها؟

الحل:

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_2$$

وبالتالي A مصفوفة عدومة من المرتبة الثانية.

14- مقلوب مصفوفة

لتكن المصفوفة المربعة $A \in M_n(F)$، فإذا وجدت مصفوفة مربعة $B \in M_n(F)$ بحيث يتحقق:

$$BA = I_n \quad و \quad AB = I_n$$

فإن المصفوفة B تسمى مقلوب (أو نظير) المصفوفة A (Matrix Inverse) وهي مصفوفة وحيدة ويرمز لها بالرمز A^{-1}، ويقال عن المصفوفة A عندئذ إنها مصفوفة عكوسة (Invertible) (أو قلوبة أو منتظمة)، بينما إذا لم يوجد نظيراً للمصفوفة A فإنها تدعى مصفوفة فريدة أو شاذة (Singular). سنتحدث لاحقاً في هذا الكتاب عن كيفية إيجاد مقلوب مصفوفة.

في حال المصفوفات المربعة يكون $AB = I_n$ إذا وفقط إذا كان $BA = I_n$، وبالتالي نكتفي بإجراء حاصل ضرب واحد فقط كي نحكم فيما إذا كانت مصفوفتان إحداهما مقلوب الأخرى.

ويبرهن على أنه إذا كانت $A \in M_n(F)$ فإن القضايا التالية متكافئة:

1. A قلوبة
2. يوجد $B \in M_n(F)$ بحيث $AB = I_n$
3. يوجد $C \in M_n(F)$ بحيث $CA = I_n$

و بالتالي نكتفي بـ $AB = I_n$ لبرهان أن أحد المصفوفتين مقلوب للآخر.

مثال (19):

لتكن المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

بفرض أن $ad - bc \neq 0$ أثبت أن مقلوب المصفوفة A هو:

$$B = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

الحل:

تكون المصفوفة B مقلوب المصفوفة A إذا تحقق:

$$AB = I_2$$

ومنه

$$AB = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$AB = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

إذن:

$$AB = I_2$$

وبالتالي

$$B = A^{-1}$$

15- المصفوفة المتعامدة

لتكن المصفوفة المربعة $A \in M_n(F)$، نقول أن المصفوفة A متعامدة (Orthogonal Matrix) إذا وفقط إذا تحقق:

$$AA^T = A^TA = I_n$$

ينتج من التعريف مباشرة أن كل مصفوفة متعامدة هي مصفوفة عكوسة، وأن نظير المصفوفة المتعامدة A هو منقولها، أي:

$$A^{-1} = A^{T}$$

مثال (20):

لتكن المصفوفة:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

أثبت أنها متعامدة؟

الحل:

نوجد A^T:

$$A^{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AA^{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$A^{T}A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

ومنه

$$AA^{T} = A^{T}A = I_2$$

وبالتالي المصفوفة A متعامدة.

مثال (21):

أثبت أن المصفوفة التالية متعامدة

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

الحل:

نوجد A^T :

$$A^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

نوجد $A\,A^T$:

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

نوجد A^TA:

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

ومنه

$$AA^T = A^TA = I_2$$

والمصفوفة A متعامدة.

16-التحويلات الأولية على المصفوفة

16-1 التحويلات الأولية السطرية

لتكن $A \in M_{m\times n}(F)$. نعرّف التحويلات الأولية السطرية (Elementary Row Operations) على المصفوفة A بأنها التحويلات الثلاثة الآتية:

1. مبادلة السطر i بالسطر k ونرمز لذلك بالرمز:

$$R_i \leftrightarrow R_k$$

2. ضرب السطر i بـ $0 \neq \lambda \in F$ ونرمز لذلك بالرمز:

$$\lambda R_i \rightarrow R_i.$$

3. ضرب السطر k بـ $0 \neq \lambda \in F$ وإضافته إلى السطر i ونرمز لذلك بالرمز:

$$R_i + \lambda R_k \rightarrow R_i$$

ونقول عن مصفوفة A إنها مكافئة سطرياً (Row Equivalent to) لمصفوفة B، إذا كان بالإمكان الحصول على B من A بسلسلة من التحويلات الأولية السطرية، ونكتب:

$$A \sim B$$

مثال (22):

لتكن المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

طبق كلاً من التحويلين التاليين:

$$3R_3 \rightarrow R_3 \quad \text{و} \quad R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2$$

عليها؟

الحل:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} R_2 - 2R_1 \to R_2 \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & -7 \\ 5 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} 3R_3 \to R_3 \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & -7 \\ 15 & -6 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

يمكن إجراء التحويلين معاً في خطوة واحدة كونهما مستقلان عن بعضهما.

2-16 التحويلات الأولية العمودية

لتكن $A \in M_{m\times n}(F)$. نعرف التحويلات الأولية العمودية (Elementary Column Operations) على المصفوفة A بأنها التحويلات الثلاثة الآتية:

1. مبادلة العمود j بالعمود i ونرمز لذلك بالرمز:

$$C_i \leftrightarrow C_j$$

2. ضرب العمود j بـ $0 \neq \lambda \in F$ ونرمز لذلك بالرمز:

$$\lambda C_j \to C_j$$

3. ضرب العمود k بـ $0 \neq \lambda \in F$ وإضافته إلى العمود j ونرمز لذلك بالرمز:

$$C_j + \lambda C_k \to C_j$$

ونقول عن مصفوفة A إنها مكافئة عمودياً (Column Equivalent to) لمصفوفة B إذا كان بالإمكان الحصول على B من A بسلسلة من التحويلات الأولية العمودية، ونكتب: $A \sim B$.

ملاحظة:

في هذا الكتاب سنستخدم الترميز $A \sim B$ للتعبير عن أن المصفوفة A تكافئ المصفوفة B سطرياً، و إذا أردنا غير ذلك سنعبر عنه صراحة.

16-3 المصفوفة الأولية

نقول عن المصفوفة المربعة $A \in M_n(F)$ إنها أولية (Elementary Matrix)، عندما وفقط عندما: $A \sim I_n$ بإجراء تحويل أولي واحد فقط.

مثال (23):

أثبت أن المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

أولية؟

الحل

بتطبيق التحويل السطري التالي: $R_2 + 2\,R_1 \rightarrow R_2$ على المصفوفة A نحصل مباشرة على المصفوفة الواحدية I_3. أي:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} R_2 + 2\,R_1 \rightarrow R_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

ومنه A مصفوفة أولية.

17-المصفوفة المدرجة

لتكن $A \in M_{m\times n}(F)$. نقول عن A إنها مصفوفة مدرجة(Echelon Matrix) إذا تحققت الشروط التالية:

1. السطور غير الصفرية (إن وجدت) في A تسبق السطور الصفرية.
2. أول عنصر غير صفري في كل سطر غير صفري هو الواحد و ندعوه العنصر الرائد في سطره.

3. العنصر الرائد في كل سطر يقع على يمين العنصر القائد في السطر الذي يسبقه.

مثال (24):

إن المصفوفات التالية هي مصفوفات مدرجة:

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&3&2&0&4&5&-6\\0&0&1&4&-3&2&0\\0&0&0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1&2&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

بينما المصفوفات التالية ليست مصفوفات مدرجة:

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\0&0&4\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&3&2&0&4&5&-6\\0&0&1&1&-3&2&0\\0&1&0&0&0&6&2\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1&2&0&0\\0&1&0&3&0\\1&0&0&0&6\end{bmatrix}$$

18-المصفوفة المدرجة المختزلة

لتكن $A \in M_{m\times n}(F)$. نقول عن A إنها مصفوفة مدرجة مختزلة (Reduced Echelon Matrix) إذا تحقق الشرطين التاليين:

1. A مدرجة.
2. العنصر الرائد في كل سطر هو الوحيد غير الصفري في عموده.

مثال (25):

إن المصفوفات التالية هي مصفوفات مدرجة ولكنها غير مختزلة:

$$\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&7\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&3&0&0&4&1&-6\\0&0&1&1&-3&0&0\\0&0&0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1&2&0&0\\0&1&0&3&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

بينما المصفوفات التالية هي مصفوفات مدرجة مختزلة:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

مبرهنة (3):

أياً كانت المصفوفة المربعة $A \in M_{m\times n}(F)$ ، فإنه يوجد مصفوفة A' مدرجة مختزلة مكافئة للمصفوفة A.

1-18 خطوات تحويل مصفوفة لمصفوفة مدرجة مختزلة

لتكن لدينا المصفوفة $A \in M_{m\times n}(F)$ فلتحويلها إلى مصفوفة مدرجة مختزلة نتبع ما يلي:

1. نبحث عن أول عمود في المصفوفة يحوي عنصر غير صفري، فإذا كان السطر الذي يحوي هذا العنصر غير الصفري ليس السطر الأول فإننا نبادل بينه و بين السطر الأول.
2. إذا كان هذا العنصر غير الصفري مخالفاً للواحد فإننا نضرب السطر بمقلوب هذا العنصر ليصبح العنصر مساوياً للواحد ويكون هو العنصر الرائد.
3. نضرب السطر الأول بالأعداد المناسبة ونجمعه إلى بقية الأسطر في المصفوفة الأصلية A حتى يصبح العنصر الرائد فيه هو الوحيد غير الصفري في عموده.
4. نكرر تطبيق الخطوتين 1 و 2 على المصفوفة الجزئية المكونة من جميع الأسطر باستثناء السطر الأول، حتى تصبح المصفوفة بالشكل المدرج المختزل.

مثال (26):

ليكن لدينا المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 8 & 2 & 5 \\ 9 & 12 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة المدرجة المختزلة المكافئة لهذه المصفوفة؟

الحل:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 8 & 2 & 5 \\ 9 & 12 & 3 & 10 \end{bmatrix} \sim_{\frac{1}{3}R_1 \to R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4/3 & 1/3 & 2/3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 \\ 9 & 12 & 3 & 10 \end{bmatrix} \sim_{\substack{R_2 - 6R_1 \to R_2 \\ R_3 - 9R_1 \to R_3}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4/3 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \sim_{\substack{R_1 - 2/3R_2 \to R_1 \\ R_3 - 4R_2 \to R_3}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

19- رتبة مصفوفة

لتكن $A \in M_{m\times n}(F)$ ولتكن B المصفوفة المدرجة (المختزلة) المكافئة لها أي: $A \sim B$.

نرمز لرتبة المصفوفة A (Rank of a Matrix) بـ $rank(A)$ وهي عدد الأسطر غير الصفرية في المصفوفة المدرجة (المختزلة) المكافئة لها B.

مثال (27):

أوجد رتبة المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل:

نوجد المصفوفة المدرجة (المختزلة) المكافئة لها:

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & 2 \end{bmatrix} R_1 \leftrightarrow R_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 - 2R_1 \to R_2 \\ R_3 - 3R_1 \to R_3 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 0 & 13 & -5 \\ 0 & 13 & -5 \end{bmatrix} \frac{1}{13} R_2 \to R_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -5/13 \\ 0 & 13 & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 + 6R_2 \to R_1 \\ R_3 - 13R_2 \to R_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4/13 \\ 0 & 1 & -5/13 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

عدد الأسطر غير الصفرية في المصفوفة الناتجة هو 2 ومنه:

$$\text{rank}(A) = 2$$

20- إيجاد مقلوب مصفوفة باستخدام التحويلات الأولية

مبرهنة (4):

إذا كانت المصفوفة المربعة $A \in M_{m\times n}(F)$ ، فإن:

$$A \sim I_n \Leftrightarrow \text{قلوبة } A$$

واستناداً إلى هذه المبرهنة يمكن بناء الخوارزمية التالية:

لتكن $A \in M_n(F)$، عندئذ يمكن الاستفادة من التحويلات الأولية لإيجاد المقلوب (Inverse of Matrix) وتتلخص كما يلي:

1. نكتب المصفوفة $(A|I_n)$ حيث I_n المصفوفة الواحدية من المرتبة n.
2. نجري تحويلات أولية سطرية على المصفوفة $(A|I_n)$ حتى نحصل على المصفوفة $(I_n|B)$.
3. إن $A^{-1} = B$

إذا لم نحصل على المصفوفة $(I_n|B)$ فإن المصفوفة A غير قلوبة.

مثال (28):

لتكن المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

أوجد مقلوبها؟

الحل:

نشكل المصفوفة الموسعة $(A|I_3)$ ثم نوجد المصفوفة المدرجة (المختزلة) المكافئة لها:

$$(A|I_n) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2 + 2R_1 \to R_2 \\ R_3 - R_1 \to R_3 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] R_2 \leftrightarrow R_3 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] -R_2 \to R_3 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 - 2R_2 \to R_1 \\ R_3 - 5R_2 \to R_3 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 1 & 5 \end{array}\right] -\frac{1}{2}R_3 \to R_3 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -1/2 & -5/2 \end{array}\right] \quad R_1 + R_3 \to R_1 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -1/2 & -5/2 \end{array}\right]$$

ومنه:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3/2 & -1/2 & -5/2 \end{bmatrix}$$

21- كثيرة حدود مصفوفة

لتكن المصفوفة المربعة $A \in M_n(F)$ ، وليكن كثير الحدود $f(t) \in F[t]$ (Polynomial of a Matrix) حيث:

$$f(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$$

فإننا نعرف:

$$f(A) = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I$$

حيث I_n المصفوفة الواحدية. ونقول إن A جذر أو صفر لكثيرة الحدود $f(t)$ إذا كان $f(A) = 0_n$.

مثال (29):

لتكن المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

وليكن:

$$g(x) = x^2 + 3x - 10 \text{ و } f(x) = 2x^2 - 3x + 5$$

أوجد $f(A)$ و $g(A)$؟

الحل:

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix}$$

نحسب $f(A)$:

$$f(A) = 2A^2 - 3A + 5I$$

$$f(A) = 2\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 16 & -18 \\ -27 & 61 \end{bmatrix}$$

نحسب $g(A)$:

$$g(A) = A^2 + 3A - 10\,I$$

$$g(A) = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} - 10\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إن A هي صفر لكثيرة الحدود $g(x)$.

مثال (30):

لتكن المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -4 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

وليكن:

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + 6x + 4$$

أوجد $f(A)$؟

الحل:

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -4 & -6 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -4 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & -6 & -4 \\ 16 & 20 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & -6 & -4 \\ 16 & 20 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -4 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} -4 & -6 & -4 \\ 16 & 20 & 10 \\ -40 & -44 & -20 \end{bmatrix}$$

نحسب $f(A)$:

$$f(A) = A^3 + 4A^2 + 6A + 4I$$

$$f(A) = \begin{bmatrix} -4 & -6 & -4 \\ 16 & 20 & 10 \\ -40 & -44 & -20 \end{bmatrix}^3 + 4\begin{bmatrix} -4 & -6 & -4 \\ 16 & 20 & 10 \\ -40 & -44 & -20 \end{bmatrix}^2$$

$$+6\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -4 & -6 & -4 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إن A هي صفر كثيرة الحدود $f(x)$.

22- المصفوفات المجزأة

عندما نتعامل مع مصفوفات من مراتب عليا فإنه من الأنسب تجزئة هذه المصفوفات (Partitioned Matrices) إلى مصفوفات أصغر تسمى قوالب (Block Matrices). ويمكن أن تتم هذه التجزئة بعدة طرائق.

فمثلاً:

لتكن $A, B \in M_{10000}(F)$ حيث:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\ 10000} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\ 10000} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{10000\ 1} & a_{10000\ 2} & \cdots & a_{10000\ 10000} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1\ 10000} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2\ 10000} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{10000\ 1} & b_{10000\ 2} & \cdots & b_{10000\ 10000} \end{bmatrix}$$

وحساب جداء هاتين المصفوفتين قد يأخذ وقتاً طويلاً، وفي بعض الأحيان يكون من المستحيل حسابه، وخصوصاً لأنه يأخذ ذاكرة حاسوبية كبيرة، ولحل هذه المشكلة نجزئ المصفوفتين A و B إلى قوالب صغيرة كل قالب:

$$A_{ij}, B_{ij}\ , \qquad i = 1,2,\dots,100; \quad j = 1,2,\dots,100$$

من المرتبة 100، على الشكل التالي:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1\ 100} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2\ 100} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{100\ 1} & A_{100\ 2} & \cdots & A_{100\ 100} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1\ 100} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2\ 100} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{100\ 1} & B_{100\ 2} & \cdots & B_{100\ 100} \end{bmatrix}$$

عندئذ:

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1\ 100} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2\ 100} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{100\ 1} & A_{100\ 2} & \cdots & A_{100\ 100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1\ 100} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2\ 100} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{100\ 1} & B_{100\ 2} & \cdots & B_{100\ 100} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1\ 100} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2\ 100} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{100\ 1} & C_{100\ 2} & \cdots & C_{100\ 100} \end{bmatrix} = C$$

حيث:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{100} A_{ik} B_{kj} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{i\,100}B_{100\,j}$$

$$i = 1,2,\ldots,100 \;\; ; \;\; j = 1,2,\ldots,100$$

فمثلاً:

$$C_{12} = \sum_{k=1}^{100} A_{1k} B_{k2} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + \cdots + A_{1\,100}B_{100\,2}$$

مثال (31):

إذا كانت :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

و

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

أوجد AB؟

الحل:

نجزئ كل من A و B بصورة مناسبة :

$$A_{4\times4} = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ \hdashline 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$B_{4\times 6}=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

حيث:

$$A_{11}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ A_{12}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix},\ A_{21}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ A_{22}=\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

و

$$B_{11}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ B_{12}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$B_{21}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix},\ B_{22}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ومنه:

$$C=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 6 & 12 & 0 & -3 & 7 & 5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -12 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ -9 & -2 & 7 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

23- المصفوفة الجزئية من مصفوفة

لتكن المصفوفة المربعة $A \in M_n(F)$ ، عندئذ نرمز بـ A_{ij} للمصفوفة الجزئية (Submatrix of a Matrix) المربعة من المرتبة $n - 1$، والناتجة من المصفوفة A بحذف السطر ذي الرقم i و العمود ذي الرقم j.

مثال (32):

لتكن لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 9 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

أوجد A_{23} و A_{34}؟

الحل:

$$A_{23} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, A_{34} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

تمارين

السؤال الأول:

ليكن لدينا:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

أوجد $2A + 4B - C$؟

السؤال الثاني:

ليكن لدينا:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

أوجد AA^T و A^TA؟

السؤال الثالث:

ليكن لدينا:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & -5 & 6 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

حوّل المصفوفات السابقة إلى الشكل المدرج المختزل، ثم أوجد رتبة كل منها؟

السؤال الرابع:

ليكن لدينا:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

وليكن:

$$g(x) = x^2 + 2x - 11 \quad و \quad f(x) = 2x^3 - 4x + 5$$

والمطلوب:

أوجد $f(A)$ و $g(A)$؟

السؤال الخامس:

ليكن لدينا:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix}$$

أثبت أن المصفوفة السابقة هرميتية؟

السؤال السادس:

ليكن لدينا:

$$A = \begin{bmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{bmatrix}$$

أثبت أن المصفوفة السابقة هرميتية متخالفة؟

السؤال السابع:

ليكن لدينا:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

بين أن المصفوفة السابقة دورية و بين دورها؟

السؤال الثامن:

ليكن لدينا:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

أثبت أن المصفوفة السابقة عدومة، وأوجد مرتبة انعدامها؟

السؤال التاسع:

ليكن لدينا:

$$A = \begin{bmatrix} 2+3i & 5-2i & 7i \\ 1-i & i & 4-3i \\ -1 & 3i & 1-i \\ 1 & i & 3-6i \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

اكتب A كمجموع مصفوفتين إحداهما هرميتية والأخرى هرميتية متخالفة؟

السؤال العاشر:

ليكن لدينا:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 9 & -7 \\ -2 & -1 & 6 & 2 \\ 5 & 1 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

اكتب A كمجموع مصفوفتين إحداهما متناظرة والأخرى متناظرة متخالفة؟

السؤال الحادي عشر:

ليكن لدينا:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

أثبت أن A متعامدة؟

الفصل الثاني

المحددات

1- مقدمة

إن لنظرية المحدِّدات (Determinants) صلة قوية بنظرية المصفوفات، وتعود بدايات النظريتين إلى نهاية القرن السابع عشر وبداية القرن الثامن عشر؛ متزامنة مع دراسة حل مجموعة معادلات خطية.

وقد أسهم الكثير من علماء الرياضيات في تطوير هاتين النظريتين، منهم: ليبنتز Keibniz، وكرامر Cramer، وماكلوران Maclaurin، وبيزو Bézout، وفاندرموند Vandermonde، ولاغرانج Lagrange، ولابلاس Laplace .

تعد المحددات أهم قيم عددية يمكن استخراجها من المصفوفات، وتحتل مكانة مهمة في مجال التطبيقات الرياضية المختلفة، حيث يمكن استخدامها لحل مجموعة من المعادلات الخطية، ولها استخدامات في التفاضل والتكامل وفي التطبيقات الهندسية . كما تستخدم في حل المشكلات التجارية والاقتصادية المختلفة.

2- تعريف المحدد

لتكن المصفوفة المربعة $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$ ، نعرف محدد المصفوفة A ونرمز له بـ $\det(A)$ أو $|A|$ كما يلي:

1. إذا كان $n = 1$ فإن: $\det(A) = a_{11}$.
2. إذا كان $n = 2$ فإن: $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
3. إذا كان $n > 2$ فإن:

$$\det(A) = a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det A_{1n}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det A_{1j}$$

يُدعى هذا التعريف النشر وفق السطر الأول. يمكن تعريف $\det(A)$ بالنشر وفق أي سطر كالتالي:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ندعو المقدار: $(-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$ بالعامل المرافق للعنصر a_{ij} ونرمز له بـ D_{ij}، أي أن:

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

مثال (1):

لتكن المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

أوجد محدد المصفوفة؟

الحل

سنوجد المحدد بالنشر وفق السطر الأول، وذلك كما يلي:

$$|A| = (-1)^{1+1} a_{11} A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} A_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} A_{13}$$

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}$$

$$- a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

مثال (2):

لتكن المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -6 & 3 \\ 5 & 6 & -7 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

أوجد محدد المصفوفة؟

الحل:

سنوجد المحدد بالنشر وفق السطر الثالث، وذلك كما يلي:

$$|A| = (-1)^{3+1}(-2)A_{31} + (-1)^{3+2}0A_{32} + (-1)^{3+3}1A_{33}$$

$$|A| = -2\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -2(42 - 18) - 0 + (-6 + 30) = -24$$

3- طريقة ساروس

تستعمل هذه الطريقة (Sarrus Method) في نشر المحددات من المرتبة الثالثة فقط، فإذا كانت $A = (a_{ij}) \in M_3(F)$ ، حيث:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ونريد إيجاد $|A|$. عندئذ تتلخص طريقة ساروس كما يلي:

نعيد كتابة العمودين الأول والثاني إلى يمين محدد المصفوفة، فيتكون لدينا ثلاثة أقطار رئيسية و ثلاثة أقطار ثانوية ، وقيمة المحدد عندئذ: تساوي مجموع جداءات

عناصر كل قطر من الأقطار الرئيسية مطروحاً منها مجموع جداءات عناصر كل قطر من الأقطار الثانوية. أي:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-(a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})$$

مثال (3):

ليكن المحدد:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

أوجد قيمة المحدد وفقاً لقاعدة ساروس؟

الحل:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{matrix}$$

$$|A| = [(2)(0)(0) + (-2)(1)(3) + (1)(1)(4)] -$$
$$[(1)(0)(3) + (2)(1)(4) + (-21)(1)(0)]$$

$$|A| = (0 - 6 + 4) - (0 + 8 + 0) = -10$$

4- خواص المحددات

خاصة (1):

إن قيمة المحدد لا تتغير إذا نشرناه بالنسبة لأي سطر أو لأي عمود.

مثال (4):

ليكن المحدد:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

أوجد محدد المصفوفة

الحل:

لننشر بالنسبة للعمود الرابع:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (-1)^{1+4}(1)A_{14} + (-1)^{4+4}(1)A_{44}$$

$$|A| = -\begin{vmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

لننشر كل من المحددين الناتجين حسب عناصر عمودهما الثاني:

$$|A| = -\left((-1)^{2+2}(1)\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}(2)\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}\right)$$
$$+\left((-1)^{1+2}(2)\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}(1)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}\right)$$

$$|A| = -\big(-9 - 2(-12)\big) + (-2(-12) + 6) = 15$$

خاصة (2):

إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n، فإن محدد المصفوفة A يساوي محدد منقولها، أي:

$$|A^T| = |A|$$

مثال (5):

لتكن المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

أوجد كلاً من $|A|$ و $|A^T|$ وقارن بين الناتجين؟

الحل:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A^T| = 4 - 6 = -2$$

نلاحظ أن :

$$|A^T| = |A|$$

خاصة (3):

إذا تطابق سطران أو عمودان في مصفوفة مربعة A، فإن قيمة محدد هذه المصفوفة تساوي الصفر، أي:

$$|A| = 0$$

مثال (6):

لتكن المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

أوجد محدد المصفوفة A ؟

الحل:

إن عناصر العمودين الثاني والثالث متطابقة، وبالتالي:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

خاصة (4):

إذا تناسب سطران أو عمودان في مصفوفة مربعة A ، فإن قيمة محدد هذه المصفوفة تساوي الصفر، أي:

$$|A| = 0$$

مثال (7):

لتكن المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -8 & 14 \\ 1 & 0 & 1 \\ -18 & 12 & -21 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

أوجد محدد المصفوفة A ؟

الحل:

نلاحظ أن عناصر السطر الثالث وعناصر السطر الأول متناسبة، حيث:

$$\frac{12}{-18} = \frac{-8}{12} = \frac{14}{-21} = \frac{-2}{3}$$

وبالتالي:

$$|A| = \begin{vmatrix} 12 & -8 & 14 \\ 1 & 0 & 1 \\ -18 & 12 & -21 \end{vmatrix} = 0$$

خاصة (5):

إن مبادلة سطرين أو عمودين في محدد يغير إشارته. وبالتالي إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n و كانت $A \sim B$ إما وفق التحويل السطري

$$R_i \leftrightarrow R_j$$

أو وفق التحويل العمودي $C_l \leftrightarrow C_k$، فإن:

$$|B| = -|A|$$

مثال (8):

إذا علمت أن:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 8$$

فأوجد:

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل:

نلاحظ أن $|B|$ ينتج عن $|A|$ بالمبادلة بين العمودين الثاني والثالث، وبالتالي:

$$|B| = -|A| = -8$$

خاصة (6):

إذا ضربنا أي سطر أو عمود في محدد بعدد $k \neq 0$ ، فإن قيمة المحدد تضرب أيضاً بالعدد k. وبالتالي إذا حوى أحد أسطر أو أعمدة المحدد على عامل مشترك فيمكن إخراجه خارج المحدد.

مثال (9):

إذا علمت أن:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 8$$

فأوجد:

$$|C| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -8 \\ 3 & 0 & -12 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

الحل:

نخرج من العمود الثالث لـ$|C|$ العدد 2 عامل مشترك، وبالتالي:

$$|C| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -8 \\ 3 & 0 & -12 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -6 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

نخرج من السطر الثاني للمحدد الناتج العدد 3 عامل مشترك ، وبالتالي:

$$|C| = 2(3)\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 6|A| = 6(8) = 48$$

خاصة (7):

ضرب محدد بعدد $k \neq 0$ يكافئ ضرب عناصر أحد أسطره أو أعمدته فقط بذلك العدد.

مثال (10):

إذا كان

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

والمطلوب:

أوجد $5|A|$ ؟

الحل:

إن $5|A|$ يكافئ ضرب عناصر العمود الثاني في $|A|$ بالعدد 5.

وبالتالي:

$$5|A| = 5\begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2(5) & -5 \\ 1 & 4(5) & -1 \\ 2 & 3(5) & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -10 & -5 \\ 1 & 20 & -1 \\ 2 & 15 & 3 \end{vmatrix}$$

خاصة (8):

لا تتغير قيمة المحدد إذا ضربنا أحد أسطره بعدد $k \neq 0$ وأضفنا الناتج إلى سطر آخر.

مثال (11):

إذا علمت أن

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -8 \\ 13 & 8 & -18 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -218$$

والمطلوب:

أوجد

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

الحل:

نضرب السطر الأول للمحدد $|B|$ بالعدد 4 ونجمعه للسطر الثاني، وبالتالي:

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -8 \\ 13 & 8 & -18 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = |A| = -218$$

خاصة (9):

لجمع محددين يختلفان في عناصر سطر أو عمود فقط ويتطابقان في بقية العناصر نجمع عناصر ذلك السطر أو العمود و نكتب بقية العناصر كما هي.

مثال (12):

ليكن لدينا المحددين التاليين:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

أوجد مجموعهما؟

الحل:

لجمع المحددين $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$:

نلاحظ:

أن جميع عناصرهما متطابقة ما عدا عناصر العمود الأول، وبالتالي نجمع العناصر المتقابلة في كل من العمودين، كما يلي:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + x_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + x_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

خاصة (10)

إذا كان كل عنصر من عناصر السطر i (أو العمود j) من $|A|$ هو مجموع لعنصرين أي:

$$a_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$$

فإن:

$|A|$ يساوي مجموع محددين $|A_1| + |A_2|$، بحيث جميع عناصر المحددات $|A_1|, |A_2|, |A|$ متطابقة عدا عناصر السطر i (أو العمود j) حيث تكون هذه العناصر هي α_{ij}, β_{ij} في كل من $|A_1|$, $|A_2|$ على الترتيب.

مثال (13):

ليكن لدينا المحدد التالي:

$$\begin{vmatrix} a_1 + x_1 & a_2 + b_1 & a_3 + c_1 \\ x_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

يمكن تفريقه إلى مجموع محددين كما يلي:

$$\begin{vmatrix} a_1 + x_1 & a_2 + b_1 & a_3 + c_1 \\ x_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ x_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

خاصة (11)

إذا كانت $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$ مصفوفة مثلثية (عليا أو دنيا)، فإن قيمة محدد المصفوفة يساوي جداء عناصر قطرها الرئيسي،أي:

$$|A| = a_{11}\, a_{22} \dots a_{nn}$$

مثال (14):

ليكن لدينا المحدد التالي:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 24 & xy \\ 0 & 4 & -98 & 76 \\ 0 & 0 & 2 & 78 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

والمطلوب: أوجد $|A|$ ؟

الحل:

إن $|A|$ هو محدد لمصفوفة مثلثية عليا، ومنه قيمة المحدد تساوي جداء عناصر القطر الرئيسي، و منه:

$$|A| = 1(4)(2)(1) = 8$$

خاصة (12)

محدد المصفوفة الواحدية I يساوي الواحد، أي: $|I| = 1$

مثال (15):

ليكن لدينا المحدد التالي:

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

والمطلوب: أوجد $|I|$؟

الحل:

إن $|I|$ محدد لمصفوفة واحدية ، ومنه قيمة المحدد تساوي الواحد، أي نكتب:

$$|I| = 1$$

خاصة (13)

محدد المصفوفة السلمية $A = \mathrm{diag}(k, k, \dots, k)$ هو:

$$|A| = k\,k \dots k = k^n$$

مثال (16):

ليكن لدينا المحدد التالي:

$$A = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

والمطلوب: أوجد $|A|$؟

الحل:

$$|A| = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 8^4 = 409$$

خاصة (14)

محدد المصفوفة القطرية $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$ يساوي جداء عناصر قطرها الرئيسي، أي:

$$|A| = a_{11}\, a_{22} \dots a_{nn}$$

مثال (17):

ليكن لدينا المحدد التالي:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix}$$

والمطلوب: أوجد $|A|$؟

الحل:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = (1)(3)(2)(-7) = -42$$

نتيجة

لتكن $A, B \in M_n(F)$ فإن:

$$|AB| = |A||B|$$

مثال (18):

ليكن لدينا:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

والمطلوب: أوجد $|AB|$؟

الحل:

نوجد كلاً من $|A|$ و $|B|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (1)(4) - (3)(2) = -2$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

ومنه:

$$|AB| = |A||B| = (-2)(0) = 0$$

ملاحظة

لتكن $A, B \in M_n(F)$ فإن: $|A + B| \neq |A| + |B|$

مثال (19):

ليكن لدينا:

$$A = B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

والمطلوب: هل $|A + B| = |A| + |B|$؟

الحل:

$$|A| = |B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Longrightarrow |A| + |B| = 1 + 1 = 2$$

$$|A + B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

ومنه:

$$|A + B| \neq |A| + |B|$$

تمرين (1):

استخدم خواص المحددات لحساب قيمة المحدد التالي:

$$|A| = \begin{vmatrix} b + c & c + a & b + a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل:

نجري التحويلات التالية:

1- نضرب السطر الثاني بالعدد 1 ونضيفه إلى السطر الأول (أي نضيف السطر الثاني إلى السطر الأول) كما يلي:

$$R_1 + R_2 \to R_1$$

فينتج:

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

2- نخرج من السطر الأول $(a+b+c)$ عامل مشترك:

$$|A| = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

إن عناصر السطر الأول والثالث متطابقة، ومنه قيمة المحدد تساوي الصفر أي $|A| = 0$.

تمرين (2):

أثبت ما يلي:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1+b_1+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2+b_2+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

الحل:

نفرق المحدد إلى مجموع ثلاثة محددات حسب العمود الثالث:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1+b_1+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2+b_2+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

عناصر العمود الأول والثالث في المحدد الأول متطابقة، ومنه قيمة المحدد تساوي الصفر. كذلك عناصر العمود الثاني والثالث في المحدد الثاني متطابقة، ومنه قيمة المحدد تساوي الصفر.

وبالتالي:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1+b_1+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2+b_2+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = 0 + 0 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1+b_1+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2+b_2+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

تمرين (3):

أثبت ما يلي:

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

الحل:

نجري التحويلات التالية:

1- نضيف العمود الأول إلى العمود الثاني أي:

$$C_2 + C_1 \to C_2$$

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & 2a_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & 2a_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & 2a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

2- نخرج العدد 2 عامل مشترك من العمود الثاني:

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

3- نفرق المحدد إلى مجموع محددين حسب عناصر العمود الأول.

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2\left(\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}\right)$$

بملاحظة أن عناصر العمود الأول والثاني في المحدد الأول متطابقة، ومنه قيمة المحدد تساوي الصفر.

و بالتالي:

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2\left(0 + \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}\right)$$

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

نبادل بين عناصر العمود الأول و الثاني، ومنه:

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

تمرين (4):

استخدم خواص المحددات لحساب قيمة المحدد التالي:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل:

نجري التحويلات التالية:

1- نضرب السطر الأول بالعدد 2- ونضيفه إلى السطر الثاني:

$$R_2 - 2\,R_1 \to R_2$$

2- نضرب السطر الأول بالعدد 1− ونضيفه إلى السطر الثالث:

$$R_3 - 1\,R_1 \rightarrow R_3$$

3- نضرب السطر الأول بالعدد 1 ونضيفه إلى السطر الرابع:

$$R_4 + 1\,R_1 \rightarrow R_4$$

وبالتالي يصبح |A|:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

4- نضرب السطر الثالث بالعدد 2 ونضيفه إلى السطر الرابع:

$$R_4 + 2\,R_3 \rightarrow R_4$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

فيكون لدينا محدد مصفوفة مثلثية عليا، وبالتالي قيمة المحدد هو جداء عناصر القطر الرئيسي، ومنه:

$$|A| = (1)(-1)(-2)(6) = 12$$

تمرين (5):

استخدم خواص المحددات لحساب قيمة المحدد التالي:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 9 & 4 & 10 & -2 & 3 \\ 6 & -5 & 1 & 8 & -3 \end{vmatrix}$$

الحل:

نجري التحويلات التالية:

1- نضيف السطر الثالث إلى السطر الثاني:

$$R_2 + R_3 \rightarrow R_2$$

2- نضرب السطر الثالث بالعدد 3− ونضيفه إلى السطر الأول:

$$R_1 - 3\,R_3 \rightarrow R_1$$

3- نضرب السطر الثالث بالعدد 3− و نضيفه إلى السطر الرابع:

$$R_4 - 3\,R_3 \rightarrow R_4$$

4- نضرب السطر الثالث بالعدد 3 ونضيفه إلى السطر الخامس:

$$R_5 + 3\,R_3 \rightarrow R_5$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 11 & -1 & 8 & 0 \\ 6 & -1 & 8 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 10 & 7 & 7 & 0 \\ 12 & -11 & 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

5- نجمع السطر الثاني إلى السطر الأول

$$R_1 + R_2 \rightarrow R_1$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 10 & 7 & 7 & 0 \\ 6 & -1 & 8 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 10 & 7 & 7 & 0 \\ 12 & -11 & 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

مما سبق نجد أن عناصر السطر الأول والرابع متطابقة، وبالتالي قيمة المحدد صفر، ومنه:

$$|A| = 0$$

تمرين (5):

استخدم خواص المحددات لحساب قيمة المحدد التالي:

$$|A| = \begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{vmatrix}$$

الحل:

نجري التحويلات التالية:

1- نضيف العمود الثاني إلى العمود الأول: $C_1 + C_2 \to C_1$

2- نضيف العمود الثالث إلى العمود الثاني: $C_2 + C_3 \to C_2$

$$|A| = \begin{vmatrix} t+2 & 0 & 1 \\ t+2 & t-2 & 1 \\ 0 & t-2 & t+4 \end{vmatrix}$$

3- نخرج $t+2$ عاملاً مشتركاً من العمود الأول.

4- نخرج $t-2$ عاملاً مشتركاً من العمود الثاني:

$$|A| = (t+2)(t-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & t+4 \end{vmatrix}$$

5- نضرب العمود الأول بالعدد -1 ونجمعه للعمود الثالث:

$$C_3 + (-1)\, C_1 \to C_3$$

$$|A| = (t+2)(t-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t+4 \end{vmatrix}$$

حيث يتكون لدينا محدد مصفوفة مثلثية عليا، وبالتالي قيمة المحدد هو جداء عناصر القطر الرئيسي، ومنه:

$$|A| = (t+2)(t-2)(1)(1)(t+4)$$

$$|A| = (t+2)(t-2)\,(t+4)$$

تمرين (6):

استخدم خواص المحددات لحساب قيمة المحدد التالي:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$$

الحل:

نجري التحويلات التالية:

1- نضرب السطر الأول بالعدد 1- ونضيفه إلى كل من السطر الثاني والثالث والرابع:

$$\left.\begin{matrix} R_2 - R_1 \to R_2 \\ R_3 - R_1 \to R_3 \\ R_4 - R_1 \to R_4 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow R_i - R_1 \to R_i \,, i = 2, 3, 4$$

وبالتالي يصبح المحدد على الشكل التالي:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}$$

2- ننشر وفق عناصر العمود الأول:

$$|A| = 1. \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$$

فيتكون لدينا محدد مصفوفة قطرية، قيمته تساوي جداء عناصر قطره الرئيسي.

$$|A| = 1.a.b.c = abc$$

تمرين (7):

استخدم خواص المحددات لحساب قيمة المحدد التالي:

$$|A| = \begin{vmatrix} x^3 & 3x^2 & 3x & 1 \\ x^2 & x^2 + 2x & 2x + 1 & 1 \\ x & 2x + 1 & x + 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل:

نجري التحويلات التالية:

1- نضرب السطر الثاني بـ -1 ونضيفه للسطر الأول، ونضرب السطر الثالث بـ -1 ونضيفه للسطر الثاني، ونضرب السطر الرابع بـ -1 ونضيفه للسطر الثالث، أي:

$$\left.\begin{array}{l} R_1 - R_2 \to R_1 \\ R_2 - R_3 \to R_2 \\ R_3 - R_4 \to R_3 \end{array}\right\} \Longrightarrow R_i - R_{i+1} \to R_i \,, i = 1,2,3,4$$

$$|A| = \begin{vmatrix} x^3 - x^2 & 2x^2 - 2x & x-1 & 0 \\ x^2 - x & x^2 - 1 & x-1 & 0 \\ x-1 & 2x-2 & x-1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

2- ننشر وفق عناصر العمود الأخير:

$$|A| = \begin{vmatrix} x^2(x-1) & 2x(x-1) & x-1 \\ x(x-1) & (x+1)(x-1) & x-1 \\ x-1 & 2(x-1) & x-1 \end{vmatrix}$$

3- بإخراج $(x-1)$ عامل مشترك من كل سطر، ينتج:

$$|A| = (x-1)^3 \begin{vmatrix} x^2 & 2x & 1 \\ x & x-1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

4- نضرب السطر الثاني بـ -1 ونضيفه للسطر الأول، ونضرب السطر الثالث بـ -1 ونضيفه للسطر الثاني. أي:

$$\left.\begin{array}{l} R_1 - R_2 \to R_1 \\ R_2 - R_3 \to R_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow R_i - R_{i+1} \to R_i \,, i = 1,2$$

$$|A| = (x-1)^3 \begin{vmatrix} x(x-1) & x-1 & 0 \\ x-1 & x-1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

5- ننشر وفق عناصر العمود الأخير:

$$|A| = (x-1)^3 \begin{vmatrix} x(x-1) & x-1 \\ x-1 & x-1 \end{vmatrix}$$

6- بإخراج $(x-1)$ عامل مشترك من كل سطر، ينتج:

$$|A| = (x-1)^5 \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)^6$$

تمرين (8):

استخدم خواص المحددات لحساب قيمة المحدد التالي:

$$|A| = \begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+3 & x+4 \\ x+5 & x+6 & x+7 & x+8 \\ x+9 & x+10 & x+11 & x+12 \\ x+13 & x+14 & x+15 & x+16 \end{vmatrix}$$

الحل:

نجري التحويلات التالية:

1- نضرب السطر الأول بـ -1 ونضيفه للسطر الثاني.

2- نضرب السطر الثالث بـ -1 ونضيفه للسطر الرابع.

أي:

$$R_2 - R_1 \to R_2$$
$$R_4 - R_3 \to R_4$$

فينتج:

$$|A| = \begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+3 & x+4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ x+9 & x+10 & x+11 & x+12 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

مما سبق نجد أن السطرين الثاني والرابع متساويان، ومنه قيمة المحدد صفر. أي:

$$|A| = 0$$

تمرين (9):

استخدم خواص المحددات لحساب قيمة المحدد التالي:

$$|A| = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

الحل:

نجري التحويلات التالية:

1- نضيف السطر الثاني إلى السطر الأول:

$$R_1 + R_2 \to R_1$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b-c & a+b-c & 2a+2b \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

2- نضيف السطر الثالث إلى السطر الأول:

$$R_1 + R_3 \to R_3$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

3- نخرج $a+b+c$ عامل مشترك من السطر الأول:

$$|A| = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

4- نضرب العمود الأول بـ -1 ونضيفه للعمود الثاني، و نضرب العمود الأول بـ -1 ونضيفه للعمود الثالث، أي:

$$C_2 - C_1 \to C_2$$
$$C_3 - C_1 \to C_3$$

$$|A| = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -(a+b+c) & 0 \\ 2c & 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix}$$

حيث يتكون لدينا محدد مصفوفة مثلثية، قيمته تساوي جداء عناصر قطره الرئيسي:

$$|A| = (a+b+c)^3$$

تمرين (10):

استخدم خواص المحددات لحساب قيمة المحدد التالي:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 \end{vmatrix}$$

الحل:

نجري التحويلات التالية:

1- نضرب السطر الأول بـ $-x$ ونضيفه للسطر الثاني، ونضرب السطر الثاني بـ $-x$ ونضيفه للسطر الثالث، ونضرب السطر الثالث بـ $-x$ ونضيفه للسطر الرابع، أي:

$$\left.\begin{array}{l} R_2 - xR_1 \to R_2 \\ R_3 - xR_2 \to R_3 \\ R_4 - xR_3 \to R_4 \end{array}\right\} \Longrightarrow R_i - xR_{i-1} \to R_i \,, i = 2,3,4$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z-x & t-x \\ 0 & y(y-x) & z(z-x) & t(t-x) \\ 0 & y^2(y-x) & z^2(z-x) & t^2(t-x) \end{vmatrix}$$

2- ننشر وفق عناصر العمود الأول:

$$|A| = \begin{vmatrix} y-x & z-x & t-x \\ y(y-x) & z(z-x) & t(t-x) \\ y^2(y-x) & z^2(z-x) & t^2(t-x) \end{vmatrix}$$

3- نخرج $y - x$ عامل مشترك من العمود الأول، ونخرج $z - x$ عامل مشترك من العمود الثاني، ونخرج $t - x$ عامل مشترك من العمود الثالث:

$$|A| = (y-x)(z-x)(t-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & z & t \\ y^2 & z^2 & t^2 \end{vmatrix}$$

4- نضرب السطر الأول بـ $-y$ ونضيفه للسطر الثاني، و نضرب السطر الثاني بـ $-y$ ونضيفه للسطر الثالث، أي:

$$\left.\begin{matrix} R_2 - yR_1 \to R_2 \\ R_3 - yR_2 \to R_3 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow R_i - yR_{i-1} \to R_i \,, i = 2,3$$

$$|A| = (y-x)(z-x)(t-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & z-y & t-y \\ 0 & z(z-y) & t(t-y) \end{vmatrix}$$

5- ننشر وفق عناصر العمود الأول:

$$|A| = (y-x)(z-x)(t-x)\begin{vmatrix} z-y & t-y \\ z(z-y) & t(t-y) \end{vmatrix}$$

6- نخرج $z - y$ عامل مشترك من العمود الأول، ونخرج $t - y$ عامل مشترك من العمود الثاني.

$$|A| = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ z & t \end{vmatrix}$$

$$|A| = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$$

$$|A| = (t-z)(t-y)(t-x)(z-y)(z-x)(y-x)$$

يسمى هذا المحدد بمحدد فاندرموند، والشكل العام له هو:

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

ونشره من الشكل:

$$V_n = \Pi(x_j - x_i); \quad i < j \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

تمرين (11):

استخدم خواص المحددات لحساب قيمة المحدد التالي:

الحل:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & 1 \end{vmatrix}_n$$

هذا المحدد من المرتبة n، فيه:

- السطر الأول: جميع عناصره قيمتها 1.
- السطر الثاني: العنصر الأول فيه قيمته 1− وبقية عناصره قيمتها 1.
- السطر الثالث: العنصر الأول فيه قيمته 0، والعنصر الثاني فيه قيمته 1− وبقية عناصره قيمتها 1.
- السطر الرابع: العنصر الأول والثاني فيه قيمتهما 0، والعنصر الثالث فيه قيمته 1− وبقية عناصره قيمتها 1.

- السطر الخامس: العنصر الأول والثاني والثالث فيه قيمته 0، والعنصر الرابع فيه قيمته -1 وبقية عناصره قيمتها 1.
- وهكذا حتى الوصول إلى السطر الأخير حيث تكون فيه قيمة العناصر من العنصر الأول إلى العنصر $n-2$ أصفاراً، وقيمة العنصر $n-1$ هي -1 وقيمة العنصر الأخير 1.
- وبالتالي نلاحظ أن جميع عناصر القطر الرئيسي والعناصر الواقعة فوقه قيمتها 1، وقيمة عناصر القطر الواقع تحت القطر الرئيسي -1 وقيمة العناصر المتبقية 0.

لنجري التحويلات التالية:

1- نضيف السطر الأول إلى الثاني، $R_2 + R_1 \to R_2$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}_n$$

2- نخرج 2 عامل مشترك من السطر الثاني للمحدد

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}_n$$

3- نضيف السطر الثاني إلى الثالث

$R_3 + R_2 \rightarrow R_3$

$$|A|=2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

4- نخرج 2 عامل مشترك من السطر الثالث للمحدد:

$$|A|=2^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

5- نضيف السطر الثالث إلى الرابع:

$R_4 + R_3 \rightarrow R_4$

$$|A|=2^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}_n$$

6- نخرج 2 عامل مشترك من السطر الرابع للمحدد:

$$|A|=2^3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}_n$$

نكرر التحويلات نفسها من أجل الأسطر اللاحقة، وذلك بإضافة السطر إلى السطر الذي يليه، ثم إخراج 2 عامل مشترك، فنحصل على المحدد التالي:

$$|A|=2^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}_n$$

وهو محدد مثلثي قيمته تساوي جداء عناصر قطره الرئيسي، و منه: $|A| = 2^{n-1}$

تمرين (12):

استخدم خواص المحددات لحساب قيمة المحدد التالي:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & x+(n-1) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & x+n \end{vmatrix}_n$$

الحل:

المحدد من المرتبة n، فيه، جميع العناصر الواقعة فوق القطر الرئيسي وتحته قيمتها 1 ، وقيمة عناصر القطر الرئيسي هي على الترتيب:

$$1, x+1, x+2, \dots, x+(n-1), x+n$$

نجري التحويلات التالية:

1- نضرب السطر الأول بـ 1− ونضيفه إلى السطر الثاني ثم الثالث ثم الرابع و هكذا حتى السطر رقم n، أي:

$$\left.\begin{array}{l} R_2 - R_1 \to R_2 \\ R_3 - R_1 \to R_3 \\ \quad\vdots \\ R_n - R_1 \to R_n \end{array}\right\} \Longrightarrow R_i - R_1 \to R_i \,, i = 2, 3, 4, \dots, n$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x+1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x+(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & x+n-1 \end{vmatrix}_{n}$$

2- ننشر وفق عناصر العمود الأول، حيث يصبح المحدد من المرتبة $n-1$:

$$|A| = \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x+1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x+(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & x+n-1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

وهو محدد مثلثي قيمته تساوي جداء عناصر قطره الرئيسي. ومنه:

$$|A| = x(x+1) \dots (x+n-2)(x+n-1)$$

تمرين (13):

استخدم خواص المحددات لحساب قيمة المحدد التالي:

$$|A|=\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ n-1 & n & n-1 & \dots & 3 & 2 \\ n-2 & n-1 & n & \dots & 4 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & & n-1 & n \end{vmatrix}_n$$

الحل:

هذا المحدد من المرتبة n، فيه:

- جميع عناصر القطر الرئيسي قيمتها n.
- جميع العناصر الموازية للقطر الرئيسي والواقعة مباشرة فوق القطر الرئيسي وتحته قيمتها $n-1$.
- نتابع فتكون قيم العناصر الموازية للعناصر السابقة هي$n-2$، ثم $n-3$ حتى الوصول إلى القيمة 1.

نجري التحويلات التالية:

1- نطرح كل عمود من العمود الذي يليه، أي:

$$\left.\begin{array}{l} C_{n-1}-C_n \to C_{n-1} \\ \vdots \\ C_2-C_3 \to C_2 \\ C_1-C_2 \to C_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow C_i - C_{i+1} \to C_i\,, \qquad i=n-1,n-2,..,2,1$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & \dots & 1 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 1 & n-1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & -1 & n \end{vmatrix}_n$$

2- نضيف السطر الأول إلى كل سطر، أي:

$$\left.\begin{array}{c} R_2 + R_1 \to R_2 \\ R_3 + R_1 \to R_3 \\ \vdots \\ R_n + R_1 \to R_n \end{array}\right\} \Longrightarrow R_i + R_1 \to R_i \,, i = 2, 3, \ldots, n$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 2 & 4 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n+1 \end{vmatrix}_n$$

وهو محدد مثلثي قيمته تساوي جداء عناصر قطره الرئيسي، ومنه:

$$|A| = 2^{n-2}(n+1)$$

تمرين (14):

استخدم خواص المحددات لحساب قيمة المحدد التالي:

$$|A| = \begin{vmatrix} b+1 & a & a & \ldots & a & a \\ 1 & b & a & \ldots & a & a \\ 1 & 0 & b & \ldots & a & a \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & b & a \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b \end{vmatrix}_n$$

الحل:

هذا المحدد من المرتبة n، فيه:

- عناصر القطر الرئيسي $b+1, b, b, \dots, b$.
- جميع العناصر الواقعة فوق القطر الرئيسي مباشرة والموازية له قيمتها a.
- جميع عناصر العمود الأول ما عدا العنصر الأول قيمتها 1.
- جميع العناصر المتبقية قيمتها 0.

نفرق المحدد إلى مجموع محددين وفق عناصر العمود الأول كما يلي:

$$|A| = \begin{vmatrix} b & a & a & \dots & a & a \\ 0 & b & a & \dots & a & a \\ 0 & 0 & b & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b \end{vmatrix}_n + \begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a & a \\ 1 & b & a & \dots & a & a \\ 1 & 0 & b & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & b & a \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b \end{vmatrix}_n$$

$$|A| = D_1 + D_2$$

إن المحدد الأول D_1 هو محدد مثلثي فقيمته جداء عناصر قطره الرئيسي، ومنه:

$$D_1 = b^n$$

نطبق على المحدد الثاني D_2 التحويلات التالية:

1- نطرح كل سطر من السطر الذي يسبقه:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a & a \\ 0 & b-a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -b & b-a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & -b & b-a \end{vmatrix}_n$$

2- ننشر وفق العمود الأول:

$$D_2=\begin{vmatrix} b-a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -b & b-a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b-a & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -b & b-a \end{vmatrix}_{n-1}$$

وهو محدد مثلثي قيمته تساوي جداء عناصر قطره الرئيسي، ومنه:

$$D_2 = (b-a)^{n-1}$$

وبالتالي:

$$|A| = b^n + (b-a)^{n-1}$$

تمرين (15):

استخدم خواص المحددات لحساب قيمة المحدد التالي:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}_n$$

الحل:

هذا المحدد من المرتبة n، فيه:

- جميع عناصر القطر الرئيسي قيمتها 2.
- جميع العناصر الموازية للقطر الرئيسي و الواقعة فوقه مباشرة و تحته مباشرة قيمتها 1.
- جميع العناصر المتبقية قيمتها 0.

نفرق المحدد إلى مجموع محددين وفق عناصر العمود الأول:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}_n + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}_n$$

$$|A| = D_1 + D_2$$

نوجد قيمة المحدد الأول D_1:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}_n$$

- نضرب السطر الأول بـ -1 و نضيفه إلى السطر الثاني:

$$R_2 - R_1 \to R_2$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}_n$$

- نضرب السطر الثاني بـ -1 و نضيفه إلى السطر الثالث:

$$R_3 - R_2 \to R_3$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}_n$$

- نتابع على غرار الخطوات السابقة حتى تطبيق التحويل التالي:

بضرب السطر قبل الأخير بـ -1 ونضيفه إلى السطر الأخير:

$$R_n - R_{n-1} \to R_n$$

فنحصل على المحدد التالي:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}_n$$

وهو محدد مثلثي قيمته تساوي جداء عناصر قطره الرئيسي. ومنه:

$$D_1 = 1$$

نوجد قيمة المحدد الثاني D_2:

ننشر وفق عناصر العمود الأول:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}_{n-1}$$

نلاحظ أن المحدد الناتج له شكل المحدد $|A|$ نفسه ولكنه من المرتبة $n-1$.

ومنه:

$$|A|_n = 1 + |A|_{n-1}$$
$$|A|_n = 1 + 1 + |A|_{n-2} = 2 + |A|_{n-2}$$
$$|A|_n = 2 + 1 + |A|_{n-3} = 3 + |A|_{n-3}$$

بالمتابعة نجد:

$$|A|_n = (n-1) + 2 = n + 1$$

تمرين (16):

استخدم خواص المحددات لحساب قيمة المحدد التالي:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}_n$$

الحل:

هذا المحدد من المرتبة n، فيه:

- جميع عناصر القطر الرئيسي قيمتها a
- جميع العناصر الواقعة فوق القطر الرئيسي مباشرة و الموازية له قيمتها b
- قيمة العنصر الأخير في العمود الأول b
- جميع العناصر المتبقية قيمتها 0

نفرق المحدد إلى مجموع محددين:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}_n + \begin{vmatrix} 0 & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}_n$$

$$|A| = D_1 + D_2$$

إن المحدد الأول D_1 مثلثي وبالتالي قيمته جداء عناصر قطره الرئيسي، ومنه:

$$D_1 = a^n$$

ننشر المحدد الثاني D_2 وفق عناصر العمود الأول مع ملاحظة أن إشارة b تتحدد حسب قيمة n :

فإذا كانت قيمة n زوجية فالإشارة سالبة، وإذا كانت قيمة n فردية فالإشارة موجبة.

ومنه:

$$D_2 = (-1)^n b \begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$D_2 = (-1)^n b^{n-1} b = (-1)^n b^n$$

ومنه:

$$|A| = a^n + (-1)^n b^n = \begin{cases} a^n + b^n & \text{فردي } n \\ a^n - b^n & \text{زوجي } n \end{cases}$$

5- المصفوفة الملحقة

لتكن المصفوفة المربعة $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$ ، نعرف المصفوفة الملحقة (Adjoint Matrix) للمصفوفة A، ونرمز لها بالرمز adj A، بأنهاالمصفوفة $(D_{ij})^T$ حيث D_{ij} العوامل المرافقة للعناصر a_{ij}، و $(D_{ij})^T$المصفوفة المرافقة (Adjoint Matrix) لـ A، أي:

$$\text{adj } A = (D_{ij})^T = ((-1)^{i+j}|A_{ij}|)^T$$

مثال (20):

لتكن المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

والمطلوب: أوجد adj A؟

الحل:

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}^T$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}|A_{11}| & (-1)^{1+2}|A_{12}| & (-1)^{1+3}|A_{13}| \\ (-1)^{2+1}|A_{21}| & (-1)^{2+2}|A_{22}| & (-1)^{2+3}|A_{23}| \\ (-1)^{3+1}|A_{31}| & (-1)^{3+2}|A_{32}| & (-1)^{3+3}|A_{33}| \end{bmatrix}^T$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}^T$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

6- استخدام المحددات لإيجاد مقلوب مصفوفة

لتكن المصفوفة المربعة $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$ ، يكون للمصفوفة A مقلوب ونرمز له بـ A^{-1} إذا وفقط إذا كان محدد المصفوفة لا يساوي الصفر: $|A| \neq 0$، وتكون المصفوفة A عندئذ قلوبة، أي:

$$|A| \neq 0 \iff \text{قلوبة } A$$

عندما يكون محدد المصفوفة مساوياً للصفر $|A| = 0$، فإن المصفوفة A تكون شاذة، أي أن:

$$|A| = 0 \iff \text{شاذة } A$$

مبرهنة

لتكن المصفوفة المربعة $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$ ، فإن:

$$A.\operatorname{adj} A = \operatorname{adj} A . A = |A| I_n$$

إذا كانت A قلوبة فإن:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A$$

مثال (21):

لتكن المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

أوجد A^{-1}؟

الحل:

نحسب محدد المصفوفة:

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 7 - 30 - 3 = -26 \neq 0$$

وبالتالي يوجد للمصفوفة مقلوب.

نوجد adj A:

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}^T$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}|A_{11}| & (-1)^{1+2}|A_{12}| & (-1)^{1+3}|A_{13}| \\ (-1)^{2+1}|A_{21}| & (-1)^{2+2}|A_{22}| & (-1)^{2+3}|A_{23}| \\ (-1)^{3+1}|A_{31}| & (-1)^{3+2}|A_{32}| & (-1)^{3+3}|A_{33}| \end{bmatrix}^T$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 7 & -10 & -1 \\ -9 & -2 & 5 \\ -3 & 8 & -7 \end{bmatrix}^T$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 7 & -9 & -3 \\ -10 & -2 & 8 \\ -1 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

وبالتالي:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj } A$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{26}\begin{bmatrix} 7 & -9 & -3 \\ -10 & -2 & 8 \\ -1 & 5 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{26} & \frac{9}{26} & \frac{3}{26} \\ \frac{10}{26} & \frac{2}{26} & -\frac{8}{26} \\ \frac{1}{26} & -\frac{5}{26} & \frac{7}{26} \end{bmatrix}$$

تمرين (17):

لتكن المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

1- احسب $|A|$ ؟

2- أوجد $\text{adj } A$؟

3- تحقق من أن:

$$A.\text{adj } A = \text{adj } A . A = |A|I$$

4- أوجد A^{-1}؟

الحل:

1- نحسب محدد المصفوفة:

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1 - 20 + 21 = 2$$

2- نوجد adj A:

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}^T$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & -10 & 7 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

3-

$$A.\text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A.\text{adj } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|I$$

4- نوجد A^{-1} :

بما أن $|A| = 2 \neq 0$ فيوجد للمصفوفة A مقلوب:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj} A$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -5 & 2 & 1 \\ \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

تمارين

السؤال الأول:

احسب قيمة كل من المحددات التالية، وذلك باستخدام خواص المحددات

$$\begin{vmatrix} F+1 & A & A & A & A \\ F+1 & B & A & A & A \\ F+1 & C & B & A & A \\ F+1 & D & C & B & A \\ F+1 & E & D & C & B \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} t+2 & 0 & 1 \\ t+2 & t-2 & 1 \\ 0 & t-2 & t+4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (x+y)^2 & x+y & x+y & x+y & x+y \\ x+y & 1+a & 1 & 1 & 1 \\ x+y & x+y & 1+b & 1 & 1 \\ x+y & 1 & x+y & 1+c & 1 \\ x+y & 1 & 1 & x+y & 1+d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2ab & 2ab & 2ab & 2ab & 2ab \\ 2 & -2a & 2c & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2bc & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2c & -2c & 2 \\ 2 & 2 & 2c & 2 & -2d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a & a^2 \\ -b & b & b & b & b^2 \\ -c & -c & c & c & c^2 \\ -d & -d & -d & d & d^2 \\ -e & -e & -e & -e & e^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

السؤال الثاني:

استخدم المحددات لإيجاد مقلوب كل من المصفوفات التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

السؤال الثالث:

استخدم خواص المحددات لحساب قيمة المحدد التالي:

$$|A| = \begin{vmatrix} b+c & a & a & \dots & a & a \\ c & b+c & a & \dots & a & a \\ c & 0 & b+c & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c & 0 & 0 & \dots & b+c & a \\ c & 0 & 0 & \dots & 0 & b+c \end{vmatrix}_{n}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2+A & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2+A & \cdots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2+A \end{vmatrix}_n$$

السؤال الرابع:

برهن أن:

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & 7 & 12 & 17 & 22 \\ 3 & 8 & 13 & 18 & 23 \\ 4 & 9 & 14 & 19 & 24 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \end{vmatrix} = 0$$

الفصل الثالث

جمل المعادلات الخطية

1- تعريف

لتكن F مجموعة غير خالية، وليكن:

$$b_i, a_{ij} \in F, \quad i = 1, 2, \dots, m \,; j = 1, 2, \dots, n$$

نسمي جملة المعادلات:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{31}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

جملة m معادلة خطية (Systems of Linear Equations) ذات n مجهول على المجموعة F (حيث أن المجاهيل هي $x_1, x_2, \dots, x_n$)، تسمى الأعداد a_{ij} معاملات المجاهيل (أمثال المجاهيل)، وتدعى b_i ثوابت المعادلات.

يمكن كتابة هذه الجملة بالشكل المصفوفي (Matrix Form) :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{31} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

نسمي المصفوفة $A = (a_{ij})$ مصفوفة الأمثال، ونسمي المصفوفة $B = (b_1 b_2 \dots b_m)^T$ مصفوفة الثوابت، ونسمي المصفوفة $X = (x_1 x_2 \dots x_n)^T$ مصفوفة المجاهيل، وبذلك يمكن كتابة الجملة بالشكل:

$$AX = B$$

2- تعاريف

نقول عن جملة المعادلات $AX = B$ إنها:

- متجانسة (Homogeneous) إذا كانت مصفوفة الثوابت صفرية أي:

$$B = 0$$

- متماسكة (Consistent)إذا كانت تملك حلاً واحداً على الأقل.
- غير متماسكة (Inconcistent) إذا لم تملك حلاً على الإطلاق.

3- مناقشة وجود حل لجملة المعادلات الخطية

لمناقشة وجود الحلول لجملة المعادلات الخطية $AX = B$ ذات n مجهول، نتبع ما يلي:

1. نشكل المصفوفة الموسعة $(A|B)$، ونحسب رتبتها $\text{rank}(A|B)$.
2. نشكل مصفوفة الأمثال (A)، ونحسب رتبتها $\text{rank}(A)$.
3. نميز عدة حالات:

- إذا كان $\text{rank}(A|B) = \text{rank}(A) = n$ فإن للجملة حل وحيد.
- إذا كان $\text{rank}(A|B) = \text{rank}(A) < n$ فللجملة عدد غير منته من الحلول، و هناك $n - \text{rank}(A)$ مجهول اختياري.
- إذا كان $\text{rank}(A|B) \neq \text{rank}(A)$ فالجملة مستحيلة الحل.

مثال (1):

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} 2x - y + t &= -1 \\ -x + y + 2z + t &= 5 \\ x + 2z + 2t &= 4 \end{aligned}$$

ناقش وجود حل لهذه الجملة؟

الحل:

نشكل المصفوفة الموسعة:

$$(A|B) = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

نوجد المصفوفة المدرجة (المختزلة) المكافئة لها سطرياً، فنجد:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right] R_1 \leftrightarrow R_3 \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2 + R_1 \to R_2 \\ R_3 - 2R_1 \to R_3 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & -4 & -3 & -9 \end{array}\right] R_3 + R_2 \to R_3 \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ومنه نجد:

$$\text{rank}(A|B) = \text{rank}(A) < n$$
$$\text{rank}(A|B) = \text{rank}(A) = 2 < n = 4$$

وبالتالي للجملة عدد غير منته من الحلول وهناك:

$$n - \text{rank}(A) = 4 - 2 = 2$$

مجهول اختياري.

مثال (2):

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} x - 2y + z - t &= 1 \\ x - 3y + 3z - 4t &= 10 \\ 2x - 4y + 2z - 2t &= 1 \end{aligned}$$

ناقش وجود حل لهذه الجملة؟

الحل:

نشكل المصفوفة الموسعة:

$$(A|B) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -4 & 10 \\ 2 & -4 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

نوجد المصفوفة المدرجة (المختزلة) المكافئة لها سطرياً، فنجد:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -4 & 10 \\ 2 & -4 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2 - R_1 \to R_2 \\ R_3 - 2R_1 \to R_3 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] -R_2 \to R_2 \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] R_1 + 2R_2 \to R_1 \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 5 & -17 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ومنه نجد:

$$\text{rank}(A|B) = 3$$
$$\text{rank}(A) = 2$$

ومنه:

$$3 \neq 2$$

أي:

$$\text{rank}(A|B) \neq \text{rank}(A)$$

والجملة مستحيلة الحل.

مثال (3):

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} x - 4y - 9z &= -13 \\ 2x + 3y + 4z &= 7 \\ 4x - 5y + \alpha z &= \alpha - 5 \end{aligned}$$

ناقش بحسب قيم الوسيط الحقيقي α، وجود حل لجملة المعادلات السابقة؟

الحل:

نشكل المصفوفة الموسعة:

$$(A|B) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -9 & -13 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ 4 & -5 & \alpha & \alpha - 5 \end{array}\right]$$

نوجد المصفوفة المدرجة (المختزلة) المكافئة لها سطرياً، فنجد:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -9 & -13 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ 4 & -5 & \alpha & \alpha - 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \to R_2 \\ R_3 - 4R_1 \to R_3 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -9 & -13 \\ 0 & 11 & 22 & 33 \\ 0 & 11 & \alpha + 36 & \alpha + 47 \end{array}\right] -\frac{1}{11} R_2 \to R_2 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -9 & -13 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 11 & \alpha + 36 & \alpha + 47 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 + 4R_2 \to R_1 \\ R_3 - 11R_2 \to R_3 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \alpha + 14 & \alpha + 14 \end{array}\right]$$

$$\alpha + 14 = 0 \Rightarrow \alpha = -14$$

وهنا نميز حالتين:

1. عندما $\alpha = -14$ يكون:

$$\text{rank}(A|B) = \text{rank}(A) = 2 < n$$
$$\text{rank}(A|B) = \text{rank}(A) = 2 < 3$$

وللجملة عدد غير منته من الحلول، وهناك:

$$n - \text{rank}(A) = 3 - 2 = 1$$

مجهول اختياري.

2. عندما $\alpha \neq -14$ يكون:

$$\text{rank}(A|B) = \text{rank}(A) = n$$
$$\text{rank}(A|B) = \text{rank}(A) = 3$$

وللجملة حل وحيد.

مثال (4):

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} x + 2y + z - t &= 1 \\ 2x + 3y + z + t &= 0 \\ 3x + 5y + 2z + t &= 0 \\ 6x + 10y + 4z + t &= (\alpha + 1)^2 \end{aligned}$$

ناقش بحسب قيم الوسيط الحقيقي α وجود حل لجملة المعادلات السابقة؟

الحل:

نشكل المصفوفة الموسعة:

$$(A|B) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 10 & 4 & 1 & (\alpha+1)^2 \end{array}\right]$$

نوجد المصفوفة المدرجة (المختزلة) المكافئة لها سطرياً، فنجد:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 10 & 4 & 1 & (\alpha+1)^2 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \to R_2 \\ R_3 - 3R_1 \to R_3 \sim \\ R_4 - 6R_1 \to R_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 7 & (\alpha+1)^2-6 \end{array}\right] -R_2 \to R_2 \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 7 & (\alpha+1)^2-6 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 - 2R_2 \to R_1 \\ R_3 + R_2 \to R_3 \sim \\ R_4 + 2R_2 \to R_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (\alpha+1)^2-2 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 - 5R_3 \to R_1 \\ R_2 + 3R_3 \to R_2 \sim \\ R_4 - R_3 \to R_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\alpha+1)^2-1 \end{array}\right]$$

$$(\alpha+1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 0, \ \ \alpha = -2$$

وهنا نميز حالتين:

1. عندما $\alpha = 0$ أو $\alpha = -2$ يكون:

$$\text{rank}(A|B) = \text{rank}(A) = 3 < n$$
$$\text{rank}(A|B) = \text{rank}(A) = 3 < 4$$

وللجملة عدد غير منته من الحلول، وهناك:

$$n - \text{rank}(A) = 4 - 3 = 1$$

مجهول اختياري.

2. عندما $\alpha \neq 0$ و $\alpha \neq -2$ يكون:

$$\text{rank}(A|B) = 4$$
$$\text{rank}(A) = 3$$

ومنه:

$$4 \neq 3$$

أي:

$$\text{rank}(A|B) \neq \text{rank}(A)$$

والجملة مستحيلة الحل.

مثال (5):

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} x + y + z &= \alpha + 1 \\ \alpha x + y + (\alpha - 1)z &= \alpha \\ x + \alpha y + z &= 1 \end{aligned}$$

ناقش بحسب قيم الوسيط الحقيقي α وجود حل لجملة المعادلات الخطية السابقة؟

الحل:

نشكل المصفوفة الموسعة:

$$(A|B) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha + 1 \\ \alpha & 1 & \alpha - 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \end{array}\right]$$

نوجد المصفوفة المدرجة (المختزلة) المكافئة لها سطرياً، فنجد:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha + 1 \\ \alpha & 1 & \alpha - 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{R_2 - \alpha R_1 \to R_2 \\ R_3 - R_1 \to R_3}}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha + 1 \\ 0 & -\alpha + 1 & -1 & -\alpha^2 \\ 0 & \alpha - 1 & 0 & -\alpha \end{array}\right]$$

$$\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1$$

وهنا نميز حالتين:

1. عندما $\alpha = 1$ يكون:

$$\text{rank}(A|B) = 3$$
$$\text{rank}(A) = 2$$

ومنه:

$$3 \neq 2$$

أي:

$$\text{rank}(A|B) \neq \text{rank}(A)$$

والجملة مستحيلة الحل.

2. عندما $\alpha \neq 1$ يكون:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha+1 \\ 0 & -\alpha+1 & -1 & -\alpha^2 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & -\alpha \end{array}\right] R_3 + R_2 \to R_3 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha+1 \\ 0 & -\alpha+1 & -1 & -\alpha^2 \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha^2-\alpha \end{array}\right] -R_3 \to R_3 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha+1 \\ 0 & -\alpha+1 & -1 & -\alpha^2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha^2+\alpha \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 - R_3 \to R_1 \\ R_2 + R_3 \to R_2 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -\alpha^2+1 \\ 0 & -\alpha+1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & \alpha^2+\alpha \end{array}\right]$$

ومنه:

$$\text{rank}(A|B) = \text{rank}(A) = n$$
$$\text{rank}(A|B) = \text{rank}(A) = 3$$

وللجملة حل وحيد.

مثال (6):

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\alpha x + y + z = 1$$
$$x + \alpha y + z = 1$$
$$x + y + \alpha z = 1$$

ناقش بحسب قيم الوسيط الحقيقي α وجود حل لجملة المعادلات الخطية السابقة؟

الحل:

نشكل المصفوفة الموسعة:

$$(A|B) = \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{array}\right]$$

نوجد المصفوفة المدرجة (المختزلة) المكافئة لها سطرياً، فنجد:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{array}\right] R_3 \leftrightarrow R_1 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2 - R_1 \to R_2 \\ R_3 - \alpha R_1 \to R_3 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha - 1 & 1 - \alpha & 0 \\ 0 & 1 - \alpha & -\alpha^2 + 1 & 1 - \alpha \end{array}\right] R_3 + R_2 \to R_3 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha - 1 & 1 - \alpha & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \alpha)(\alpha + 2) & 1 - \alpha \end{array}\right]$$

$$(1 - \alpha)(\alpha + 2) \Rightarrow \alpha = 1, \alpha = -2$$

نميز ثلاث حالات:

1. عندما $\alpha = 1$ يكون:

$$\text{rank}(A|B) = \text{rank}(A) = 1 < n$$
$$\text{rank}(A|B) = \text{rank}(A) = 1 < 3$$

وللجملة عدد غير منته من الحلول، وهناك:

$$n - \text{rank}(A) = 3 - 1 = 2$$

مجهول اختياري.

2. عندما $\alpha = -2$ يكون:

$$\text{rank}(A|B) = 3 \neq \text{rank}(A) = 2$$

ومنه:

$$3 \neq 2$$

أي:

$$\text{rank}(A|B) \neq \text{rank}(A)$$

والجملة مستحيلة الحل.

3. عندما $\alpha \neq -2$ و $\alpha \neq 1$ يكون:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & (1-\alpha)(\alpha+2) & 1-\alpha \end{array}\right] \begin{array}{c} \frac{1}{(\alpha-1)} R_2 \to R_2 \\ \frac{1}{(1-\alpha)(\alpha+2)} R_3 \to R_3 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\alpha+2} \end{array}\right]$$

ومنه:

$$\text{rank}(A|B) = \text{rank}(A) = n$$
$$\text{rank}(A|B) = \text{rank}(A) = 3$$

والجملة حل وحيد.

مثال (7):

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية:

$$2x + 2y - z = -3$$
$$x + y - 2z = 0$$
$$-x - y + 2z + 3\alpha t = 3\beta$$

ناقش بحسب قيم الوسيطين الحقيقيين α و β مجموعة حلول جملة المعادلات الخطية السابقة؟

الحل:

أولاً: نشكل المصفوفة الموسعة.

$$(A|B)=\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 3\alpha & 3\beta \end{array}\right]$$

ثانياً: نوجد المصفوفة المدرجة (المختزلة) المكافئة لها.

$$(A|B)=\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 3\alpha & 3\beta \end{array}\right] R_2 \leftrightarrow R_1 \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 2 & 3\alpha & 3\beta \end{array}\right] \begin{array}{c} R_2-2R_1 \to R_2 \\ R_3+R_1 \to R_3 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3\alpha & 3\beta \end{array}\right] R_2 \to \frac{1}{3}R_2 \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3\alpha & 3\beta \end{array}\right] R_1+2R_2 \to R_1 \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3\alpha & 3\beta \end{array}\right] R_3 \to \frac{1}{3}R_3 \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta \end{array}\right]$$

نميز ثلاث حالات:

1. عندما $\alpha \neq 0$ يكون:

$$\text{rank}(A|B) = \text{rank}(A) = 3 < n$$
$$\text{rank}(A|B) = \text{rank}(A) = 3 < 4$$

وللجملة عدد غير منته من الحلول، وهناك:

$$n - \text{rank}(A) = 4 - 3 = 1$$

مجهول اختياري.

2. عندما $\beta \neq 0$ و $\alpha = 0$ يكون

$$\text{rank}(A|B) = 3 \neq \text{rank}(A) = 2$$

ومنه:

$$3 \neq 2$$

أي:

$$\text{rank}(A|B) \neq \text{rank}(A)$$

والجملة مستحيلة الحل.

3. عندما $\beta = 0$ و $\alpha = 0$ يكون:

$$\text{rank}(A|B) = \text{rank}(A) = 2 < n$$
$$\text{rank}(A|B) = \text{rank}(A) = 2 < 4$$

وللجملة عدد غير منته من الحلول، وهناك:

$$n - \text{rank}(A) = 4 - 2 = 2$$

مجهول اختياري.

مثال (8):

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\alpha x + y + z + t = 1$$
$$x + \alpha y + z + t = \beta$$
$$x + y + \alpha z + t = \beta^2$$
$$x + y + z + \alpha t = \beta^3$$

ناقش بحسب قيم الوسيطين الحقيقيين α و β مجموعة حلول جملة المعادلات الخطية السابقة في مجموعة الأعداد الحقيقية؟

الحل:

أولاً: نشكل المصفوفة الموسعة.

$$(A|B)=\left[\begin{array}{cccc|c} \alpha & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & \alpha & 1 & \beta^2 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha & \beta^3 \end{array}\right]$$

ثانياً: نوجد المصفوفة المدرجة (المختزلة) المكافئة لها.

$$(A|B)=\left[\begin{array}{cccc|c} \alpha & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & \alpha & 1 & \beta^2 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha & \beta^3 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1 \leftrightarrow R_4 \\ R_2 \leftrightarrow R_3 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha & \beta^3 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 & \beta^2 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 & \beta \\ \alpha & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_2 - R_1 \to R_2 \\ R_3 - R_1 \to R_3 \\ R_4 - \alpha R_1 \to R_4 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha & \beta^3 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 1-\alpha & \beta^2-\beta^3 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & 1-\alpha & \beta-\beta^3 \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha & 1-\alpha^2 & 1-\alpha\beta^3 \end{array}\right]$$

نميز حالتين:

1- عندما $\alpha = 1$ يكون:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & \beta^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^2-\beta^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta-\beta^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\beta^3 \end{array}\right]$$

عندئذ نميز حالتين لـ β:

a. $\beta = 1$ ومنه:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\text{rank}(A|B) = \text{rank}(A) = 1 < n$$
$$\text{rank}(A|B) = \text{rank}(A) = 1 < 4$$

وللجملة عدد غير منته من الحلول، وهناك:

$$n - \text{rank}(A) = 4 - 1 = 3$$

مجهول اختياري.

b. عندما $\beta \neq 1$ يكون:

$$\text{rank}(A|B) \neq \text{rank}(A)$$

والجملة مستحيلة الحل.

2- عندما $\alpha \neq 1$: نتابع التحويلات:

$$\sim R_2 \leftrightarrow R_3 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha & \beta^3 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & 1-\alpha & \beta-\beta^3 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 1-\alpha & \beta^2-\beta^3 \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha & 1-\alpha^2 & 1-\alpha\beta^3 \end{array}\right] R_4 + R_2 \to R_4 \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha & \beta^3 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & 1-\alpha & \beta-\beta^3 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 1-\alpha & \beta^2-\beta^3 \\ 0 & 0 & 1-\alpha & -\alpha^2-\alpha+2 & 1-\alpha\beta^3+\beta-\beta^3 \end{array}\right] R_4+R_3 \to R_4 \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha & \beta^3 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & 1-\alpha & \beta-\beta^3 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 1-\alpha & \beta^2-\beta^3 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha^2-2\alpha+3 & 1-\alpha\beta^3-2\beta^3+\beta^2+\beta \end{array}\right]$$

$$\alpha^2-2\alpha+3=0 \Longrightarrow \alpha=1,\ \ \alpha=-3$$

نعلم أن $\alpha \neq 1$ وبالتالي نميز حالتين:

1. عندما $\alpha \neq -3$ يكون:

$$\text{rank}(A|B)=\text{rank}(A)=n$$
$$\text{rank}(A|B)=\text{rank}(A)=4$$

وللجملة حل وحيد.

2. عندما $\alpha=-3$ فإن:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & \beta^3 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & \beta-\beta^3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & \beta^2-\beta^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\beta^2+1)(\beta+1) \end{array}\right]$$

بالتحويل إلى الشكل المدرج نجد:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & \beta^3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1/4\beta\,(1+\beta)\,(1-\beta) \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1/4\,\beta^2(1-\beta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\beta^2+1)(\beta+1) \end{array}\right]$$

a. إذا كان $\beta = -1$ فإن:

$$\text{rank}(A|B) = \text{rank}(A) = 3 < n$$
$$\text{rank}(A|B) = \text{rank}(A) = 3 < 4 \quad €$$

وللجملة عدد غير منته من الحلول.

وهناك:

$$n - \text{rank}(A) = 4 - 3 = 1$$

مجهول اختياري.

b. إذا كان $\beta \neq -1$ فإن:

$$\text{rank}(A|B) = 4 \neq \text{rank}(A) = 3$$

ومنه:

$$4 \neq 3$$

أي:

$$\text{rank}(A|B) \neq \text{rank}(A)$$

والجملة مستحيلة الحل.

4- طريقة غاوس لحل جملة معادلات خطية

لحل جملة المعادلات الخطية $AX = B$ بطريقة غاوس نتبع ما يلي:

1. نشكل المصفوفة الموسعة (Augmented Matrix) $(A|B)$ والمكونة من مصفوفة الأمثال ومصفوفة الثوابت.

2. نوجد المصفوفة المدرجة (المختزلة) المكافئة سطرياً للمصفوفة $(A|B)$، ولتكن $(\grave{A}|\grave{B})$.

3. نكتب جملة المعادلات الخطية الممثلة للمصفوفة $(\grave{A}|\grave{B})$.

4. نوجد مجموعة حلول الجملة الجديدة وهذه الحلول ستكون حلول جملة المعادلات الأصلية.

مثال (9):

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} x - z &= 4 \\ 2x + y - z &= 4 \\ x + 2y + 5z &= 8 \end{aligned}$$

أوجد حلها بطريقة المصفوفة الموسعة؟

الحل:

أولاً: نشكل المصفوفة الموسعة.

$$(A|B) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 8 \end{array}\right]$$

نوجد المصفوفة المدرجة (المختزلة) المكافئة لها سطرياً، فنجد:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_2 - 2R_1 \to R_2 \\ R_3 - R_1 \to R_3 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \end{array}\right] R_3 - 2R_2 \to R_3 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{array}\right] \frac{1}{4}R_3 \to R_3 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1 + R_3 \to R_1 \\ R_2 - R_3 \to R_2 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

نكتب جملة المعادلات المكافئة، فنجد:

$$\begin{aligned} x &= 7 \\ y &= -7 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

مثال (10):

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} x - y + z - t &= 2 \\ y - 2z + t &= 5 \\ 2x - y - z &= 9 \\ 2x + y - 4z + t &= 19 \end{aligned}$$

أوجد حلها بطريقة المصفوفة الموسعة؟

الحل:

نشكل المصفوفة الموسعة:

$$(A|B) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 9 \\ 2 & 1 & -4 & 1 & 19 \end{array}\right]$$

نوجد المصفوفة المدرجة (المختزلة) المكافئة لها سطرياً، فنجد:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 9 \\ 2 & 1 & -4 & 1 & 19 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_3 - 2R_1 \to R_3 \\ R_4 - 2R_1 \to R_4 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -6 & 3 & 15 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 + R_2 \to R_1 \\ R_3 - R_2 \to R_3 \\ R_4 - 3R_2 \to R_4 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ومنه:

$$\text{rank}(A|B) = \text{rank}(A) = 2 < n$$

$$\text{rank}(A|B) = \text{rank}(A) = 2 < 4$$

وللجملة عدد غير منته من الحلول، وهناك:

$$n - \text{rank}(A) = 4 - 2 = 2$$

مجهول اختياري، ولنعتبر المجهولين الاختياريين هما z, t :

بكتابة جملة المعادلات المكافئة، نجد:

$$x - z = 7 \quad \Longrightarrow x = z + 7$$
$$y - 2z + t = 5 \Longrightarrow y = 2z - t + 5$$

ومنه جملة الحلول هي:

$$\{(x, y, z, t) = (z + 7, 2z - t + 5, z, t); z, t \in R\}$$

مثال (11):

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ x + 2y + 3z + t &= 0 \\ -x - y + z + t &= -2 \\ y + z + t &= -1 \\ -y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

أوجد حلها بطريقة المصفوفة الموسعة؟

الحل:

نشكل المصفوفة الموسعة

$$(A\,|\,B)=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

نوجد المصفوفة المدرجة (المختزلة) المكافئة لها سطرياً كما يلي:

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{l} R_2-R_1\to R_2 \\ R_3+R_1\to R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]R_3\leftrightarrow R_2\sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{l} R_1-2R_2\to R_1 \\ R_4-R_2\to R_4 \\ R_5+R_2\to R_5 \end{array}\sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right]R_4\leftrightarrow R_5\sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] R_4 - R_3 \to R_4 \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tfrac{1}{3} R_3 \to R_3 \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 + 2R_3 \to R_1 \\ R_2 - R_3 \to R_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ومنه:

$$\text{rank}(A|B) = \text{rank}(A) = 3 < n = 4$$

وللجملة عدد غير منته من الحلول، وهناك:

$$n - \text{rank}(A) = 4 - 3 = 1$$

مجهول اختياري، ولنعتبر المجهول الاختياري هو t:

نكتب جملة المعادلات المكافئة، فنجد:

$$x - \frac{4}{3}t = \frac{7}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{3}t + \frac{7}{3}$$

$$y + \frac{2}{3}t = -\frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}t - \frac{2}{3}$$

$$z + \frac{1}{3}t = -\frac{1}{3} \Rightarrow z = -\frac{1}{3}t - \frac{1}{3}$$

ومنه جملة الحلول هي:

$$\{(x,y,z,t) = \left(\frac{4}{3}t+\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}t-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}, t\right); t \in R\}$$

5- طريقة كرامر لحل جملة معادلات خطية

تصلح طريقة كرامر (Cramer's Rule) لحل جملة مكونة من n معادلة خطية ذات n مجهول، وتعتمد هذه الطريقة على حساب المحددات.

إذا كانت $AX = B$ جملة n معادلة خطية ذات n مجهول، وكان محدد مصفوفة الأمثال لا يساوي الصفر، أي:

$$\Delta = |A| \neq 0$$

فيكون لجملة المعادلات حلاً وحيداً، ويكون:

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta};\ k = 1, 2, \dots, n$$

حيث:

$$\Delta_k = |A_k|$$

هو: محدد المصفوفة المربعة الناتجة من المصفوفة A باستبدال عمود الثوابت بعناصر العمود k .

5-1 مناقشة الحلول في طريقة كرامر

نميز ما يلي:

1. إذا كان $\Delta = |A| \neq 0$ فللجملة المعادلات حل وحيد
2. إذا كان $\Delta = |A| = 0$ فنميز حالتين:

a. إذا كان $\Delta_k = |A_k| \neq 0$ من أجل قيمة لـ k من المجموعة $\{1, 2, \dots, n\}$ فإن الجملة مستحيلة الحل.

b. إذا كان $\Delta_k = |A_k| = 0$ من أجل كل قيمة لـ k من المجموعة $\{1, 2, \dots, n\}$ فإن الجملة إما مستحيلة الحل، أو لها عدد غير منته من الحلول.

مثال (12):

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= -4 \end{aligned}$$

أوجد حلها بطريقة كرامر؟

الحل:

نحسب محدد مصفوفة الأمثال Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -159 \neq 0$$

وبالتالي لجملة المعادلات حل وحيد، وبالحساب نجد:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & 1 & -2 \\ -6 & 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 159$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & -6 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 159$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -6 & -1 \\ 1 & 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_{x_4} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -159$$

ومنه:

$$x_1 = \frac{159}{-159} = -1$$

$$x_2 = \frac{159}{-159} = -1$$

$$x_3 = 0$$

$$x_4 = \frac{-159}{-159} = 1$$

مثال (13):

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + y + z &= 2 \\ x + y + z &= 3 \end{aligned}$$

أوجد حلها بطريقة كرامر؟

الحل:

نحسب محدد مصفوفة الأمثال Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

نحسب قيمة كل من Δ_x, Δ_y, Δ_z فنجد:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

وبالتالي:

فإن الجملة إما مستحيلة الحل أو لها عدد غير منته من الحلول. وبطرح المعادلة الأولى من الثانية نحصل على:

$$0 = 1$$

وهذا مستحيل، فجملة المعادلات مستحيلة الحل.

مثال (14):

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} -2x - y + z &= 1 \\ x + y - z &= 3 \\ -4x - 2y + 2z &= 2 \end{aligned}$$

أوجد حلها بطريقة كرامر؟

الحل:

نحسب محدد مصفوفة الأمثال Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

نحسب قيمة كل من Δ_x, Δ_y, Δ_z فنجد:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

وبالتالي: فإن الجملة إما مستحيلة الحل أو لها عدد غير منته من الحلول.

وبملاحظة أن المعادلة الثانية تنتج عن الأولى بضرب الأولى بـ 2 والجملة تكافئ:

$$2x - y + z = 1$$
$$x + y - z = 3$$

نجمع المعادلتين فنحصل على:

$$3x = 4$$

ومنه:

$$x = \frac{4}{3}$$

نعوض x في المعادلة الثانية فنحصل على:

$$z = y - \frac{1}{3}$$

وبالتالي نجد:

أن للجملة عدد غير منته من الحلول.

مثال (16):

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية:

$$x - y = 4$$
$$2x + y - z = 4$$
$$x + 2y + 5z = 8$$

أوجد حلها بطريقة كرامر؟

الحل:

نحسب محدد مصفوفة الأمثال Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

وللجملة المعادلات حل وحيد.

وبحساب قيمة كل من Δ_x, Δ_y, Δ_z فنجد:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 28$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 8 & 5 \end{vmatrix} = -28$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 12$$

ومنه:

$$x = \frac{28}{4} = 7$$
$$y = \frac{-28}{4} = -7$$
$$z = \frac{12}{4} = 3$$

6- طريقة مقلوب مصفوفة لحل جملة معادلات خطية

تصلح طريقة مقلوب مصفوفة لحل جملة مكونة من n معادلة خطية ذات n مجهول، وتعتمد هذه الطريقة على حساب مقلوب مصفوفة الأمثال.

فإذا كانت $AX = B$ جملة n معادلة خطية ذات n مجهول، وكانت مصفوفة الأمثال A قلوبة، فبضرب طرفي الجملة بـ A^{-1} من اليسار نحصل على:

$$A^{-1}A\,X = A^{-1}B$$

وبما أن:

$$A^{-1}A = I$$

وبالتالي:

$$X = A^{-1}B$$

أي إذا كانت A قلوبة، فإن لجملة المعادلات حلاً و حيداً.

مثال (17):

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية:

$$4x_1 - 4x_2 = -5$$
$$2x_1 + x_2 = 4$$

استخدم طريقة مقلوب مصفوفة لحلها ؟

الحل:

نحسب محدد مصفوفة الأمثال A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

فالمصفوفة قلوبة.

وبحساب المقلوب نجد أن:

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

ومنه:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

وبالتالي نجد أن:

$$x_2 = 2 \quad \text{و} \quad x_1 = 1$$

مثال (18):

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية:

$$x - z = 1$$
$$2x + y - z = 1$$
$$x + 2y + 5z = 2$$

استخدم طريقة مقلوب مصفوفة لحلها ؟

الحل:

نحسب محدد مصفوفة الأمثال A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

فالمصفوفة قلوبة. وبحساب المقلوب نجد أن:

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -11 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

ومنه:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -11 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} \\ -\frac{7}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

وبالتالي:

$$x = \frac{7}{4}$$
$$y = -\frac{7}{4}$$
$$z = \frac{3}{4}$$

مثال (19):

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية:

$$x + y + 2z = 1$$
$$2x - y + 3z = 2$$
$$x + 2y - z = 1$$

استخدم طريقة مقلوب مصفوفة لحلها ؟

الحل:

نحسب محدد مصفوفة الأمثال A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 20 \neq 0$$

فالمصفوفة قلوبة، وبحساب المقلوب نجد أن:

$$A^{-1} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} -5 & 5 & 5 \\ 11 & -7 & 1 \\ 7 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

ومنه:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} -5 & 5 & 5 \\ 11 & -7 & 1 \\ 7 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

وبالتالي:

$$x = \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{10}$$

$$z = \frac{3}{10}$$

مثال (20):

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية:

$$3x + 2y - z = 0$$
$$x + 6y + 3z = 1$$
$$2x - 4y = -1$$

استخدم طريقة مقلوب مصفوفة لحلها ؟

الحل:

نحسب محدد مصفوفة الأمثال A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 64 \neq 0$$

فالمصفوفة قلوبة، وبحساب المقلوب نجد أن:

$$A^{-1} = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -11 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

ومنه:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -11 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي:

$$x = -\frac{1}{8}$$
$$y = \frac{3}{16}$$
$$z = 0$$

تمارين

السؤال الأول:

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} x + y + 3z &= \alpha \\ -x + y - z &= \alpha + 2 \\ 2x + y + \alpha z &= 0 \end{aligned}$$

ناقش بحسب قيم الوسيط الحقيقي α وجود حل لها؟

السؤال الثاني:

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} x + 2z + 2t &= 4 \\ -x + y + 2z + t &= 5 \\ 2x - y + \alpha t &= \alpha \end{aligned}$$

ناقش بحسب قيم الوسيط الحقيقي α وجود حل لها؟

السؤال الثالث:

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z - 3t &= 4 \\ 3x - y - z + 5t &= 2 \\ x + y + z - t &= 6 \\ 4x + y + z + (\alpha^2 - 14)t &= \alpha + 2 \end{aligned}$$

ناقش بحسب قيم الوسيط الحقيقي α وجود حل لها؟

السؤال الرابع:

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 2z + t &= 2 \\ x + y - z + 2t &= 0 \\ -2x - y - 2z + \alpha t &= \beta \end{aligned}$$

ناقش بحسب قيم الوسيطين الحقيقيين α و β مجموعة حلول جملة المعادلات الخطية السابقة؟

السؤال الخامس:

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y + z &= 1 \\ x + \alpha\beta y + z &= \beta \\ x + \beta y + \alpha z &= 1 \end{aligned}$$

ناقش بحسب قيم الوسيطين الحقيقيين α و β مجموعة حلول جملة المعادلات الخطية السابقة؟

السؤال السادس:

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} x + 3y + z - t &= 5 \\ 2x + 6y + 2z + t &= 6 \\ -x - 3y + 3z + 2t &= 7 \end{aligned}$$

استخدم طريقة المصفوفة الموسعة لحلها؟

السؤال السابع:

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} 4x + y + z + t &= 6 \\ 3x + 7y - z + t &= 1 \\ 7x + 3y - 5z + 8t &= -3 \\ x + y + z + 2t &= 3 \end{aligned}$$

استخدم طريقة كرامر لحلها؟

الفصل الرابع

القيم الذاتية والأشعة الذاتية

1- مقدمة

تعد القيم الذاتية (Eigenvalues) والأشعة الذاتية (Eigenvectors) من الخواص المهمة للمصفوفة. ولها تطبيقات عديدة في مجال الرياضيات التطبيقية، وميكانيك الكم، والفيزياء، والاقتصاد، والهندسة.

وفيما يلي أمثلة عن بعض استخدامات القيم الذاتية والأشعة الذاتية في الحياة العملية:

- تمكّن الأشعة الذاتية مهندسي نظم التحكم من ضمان استقرار النظم الموزعة وتقليل دارات التحكم فيها وتحسين أدائها.
- تستخدم على نطاق واسع في الهندسة الكيميائية لحل جمل المعادلات التفاضلية الخطية، حيث يتراوح استخدامها بين مسائل الخلط المعقدة إلى مسائل التفاعلات الكيميائية المعقدة.
- تستخدم في البنى الديناميكية للتنبؤ بما ستكون عليه هذه البنى إذا طبق عليها اهتزازات مختلفة.
- تستخدم في التطبيقات الفيزيائية وبشكل خاص في مسائل الحركة.

2- الحدودية المميزة لمصفوفة مربعة

لتكن $A \in M_n(F)$ مصفوفة مربعة، عندئذ نعرّف الحدودية المميزة (Characteristic Polynomial) للمصفوفة A بأنها الحدودية:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I_n - A|$$

حيث I_n: هي المصفوفة الواحدية من المرتبة n.

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n - \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n|A|$$

إن منشور هذا المحدد هو حدودية من الدرجة n في λ هذه الدرجة هي نفس مرتبة المصفوفةA . و تتصف $\Delta(\lambda)$ بالصفات التالية:

- أمثال الحد λ^n هو 1.
- أمثال الحد λ^{n-1} هو $-Tr(A)$ (و$Tr(A)$ هو أثر المصفوفة A).
- أمثال الحد الثابت هو $(-1)^n|A|$.

مثال (1):

لتكن لدينا المصفوفة الحقيقية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

أوجد الحدودية المميزة لها؟

الحل:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

نلاحظ أن الحدودية المميزة من الدرجة الثانية بالنسبة لـ λ وهو نفس مرتبة المصفوفة.

حيث أن:

أمثال الحد λ^2 هو: 1.

وأمثال الحد λ هو:

$$-Tr(A) = -(2 + 1) = -3$$

والحد الثابت هو:

$$(-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

مثال (2):

لتكن لدينا المصفوفة الحقيقية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

أوجد الحدودية المميزة لها؟

الحل:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & -3 \\ 0 & \lambda + 1 & -2 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

بالنشر وفق العمود الأول نجد أن:

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - 2)\begin{vmatrix} \lambda + 1 & -2 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ \lambda + 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda^2 + \lambda) - (-2 + 3\lambda + 3)$$
$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 1$$

نلاحظ أن الحدودية المميزة من الدرجة الثالثة بالنسبة لـ λ وهو نفس مرتبة المصفوفة.

حيث أن:

أمثال الحد λ^3 هو: 1 .

أمثال الحد λ^2 هو:

$$-\mathrm{Tr}(A) = -(2 - 1) = -1$$

والحد الثابت هو :

$$(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

نتيجة:

تكون المصفوفة المربعة $A \in M_n(F)$ قلوبة إذا كان الحد الثابت في حدوديتها المميزة لا يساوي الصفر.

فمثلاً:

المصفوفة $A \in M_3(R)$ والتي حدوديتها المميزة:

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 2$$

هي مصفوفة قلوبة لأن الحد الثابت في حدوديتها المميزة غير معدوم.

أما المصفوفة $B \in M_3(R)$ والتي حدوديتها المميزة:

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda$$

هي مصفوفة غير قلوبة (شاذة) لأن الحد الثابت في حدوديتها المميزة معدوم.

ملاحظة:

لكل مصفوفة مربعة $A \in M_n(F)$ حدودية مميزة وحيدة، وقد يكون لمصفوفتين مختلفتين الحدودية المميزة نفسها.

مثال (3):

لتكن لدينا المصفوفة الحقيقية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

أوجد الحدودية المميزة لها؟

الحل:

نوجد الحدودية المميزة للمصفوفة A:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 4) + 2$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

مثال (4):

لتكن لدينا المصفوفة الحقيقية:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

أوجد الحدودية المميزة لها؟

الحل:

نوجد الحدودية المميزة للمصفوفة B:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I_n - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 4 \\ 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

نلاحظ من المثالين (3) و(4) أن للمصفوفتين A و B الحدودية المميزة نفسها على الرغم من أن المصفوفتين غير متساوتين.

3 – مبرهنة كايلي هاملتون

كل مصفوفة هي صفر (جذر) لحدوديتها المميزة.

مثال (5):

لتكن لدينا المصفوفة الحقيقية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

أوجد الحدودية المميزة لها، وتحقق من مبرهنة كايلي هاملتون فيما إذا كانت مطبقة عليها أم لا؟

الحل:

نوجد الحدودية المميزة للمصفوفة A:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2) - 6$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

نعوض A في الحدودية:

$$\Delta(A) = A^2 - 3A - 4I$$

$$\Delta(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^2 - 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3-1 استخدام مبرهنة كايلي هاملتون في إيجاد مقلوب مصفوفة

يمكننا استخدام مبرهنة كايلي هاملتون في إيجاد مقلوب مصفوفة غير شاذة.

لتكن:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$$

الحدودية المميزة للمصفوفة A .

وحسب مبرهنة كايلي هاملتون نجد أن المصفوفة A هي جذر لحدوديتها المميزة $\Delta(\lambda)$ وبالتالي نحصل على:

$$A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1A + c_0I_n = 0$$

بضرب طرفي هذه المعادلة بـ A^{-1} نجد:

$$A^{n-1} + c_{n-1}A^{n-2} + \cdots + c_1I_n + c_0A^{-1} = 0$$

ومنه:

$$A^{-1} = -\frac{1}{c_0}(A^{n-1} + c_{n-1}A^{n-2} + \cdots + c_1I_n)$$

مثال (6):

لتكن لدينا المصفوفة الحقيقية:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

أوجد الحدودية المميزة لها، واستفد منها لإثبات أن المصفوفة قلوبة واحسب مقلوبها؟

الحل:

أولاً: نوجد الحدودية المميزة للمصفوفة A:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -3 & 1 \\ 3 & \lambda-5 & 1 \\ 3 & -3 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

نجري التحويلات التالية:

- نضرب السطر الأول بـ -1 و نضيفه إلى السطر الثاني:

$$-R_1 + R_2 \to R_2$$

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -3 & 1 \\ -\lambda+2 & \lambda-2 & 0 \\ 3 & -3 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

- نجمع العمود الأول إلى العمود الثاني:

$$C_1 + C_2 \to C_2$$

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & \lambda-2 & 1 \\ -\lambda+2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = -(\lambda-2)(-\lambda+2)(\lambda-1) = (-\lambda+2)^2(\lambda-1)$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4$$

ثانياً: A مصفوفة قلوبة لأن الحد الثابت في حدوديتها المميزة هو -4 وهو غير معدوم.

ثالثاً: بما أن المصفوفة A هي جذر لحدوديتها المميزة حسب مبرهنة كايلي هاملتون، وبالتالي:

$$\Delta(A) = 0$$

$$A^3 - 5A^2 + 8A - 4I = 0$$

نضرب الطرفين بـ A^{-1} فنجد:

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - 5A + 8I)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} + 8\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix} -5 & 9 & -3 \\ -9 & 13 & -3 \\ -9 & 9 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -15 & 5 \\ 15 & -25 & 5 \\ 15 & -15 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 18 & 6 & 2 \\ 6 & 20 & 2 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

4- الحدودية الأصغرية لمصفوفة مربعة

لتكن $A \in M_n(F)$ مصفوفة مربعة، نعرّف **الحدودية** الأصغرية (Minimum Polynomial) للمصفوفة A ونرمز لها بـ $\mathbf{m(\lambda)}$ بأنها: الحدودية الواحدية (أمثال أعلى حد فيها يساوي الواحد) ذات **الدرجة الأصغر** التي تقبل A صفراً لها.

ملاحظة:

لكل مصفوفة مربعة $A \in M_n(F)$ حدودية **أصغرية** وحيدة، وقد يكون لمصفوفتين مختلفتين الحدودية الأصغرية نفسها.

4 -1 استخدام الحدودية الأصغرية لإيجاد مقلوب مصفوفة

لتكن:

$$m(\lambda) = \lambda^r + b_{r-1}\lambda^{r-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0$$

الحدودية الأصغرية للمصفوفة A، ومنه نجد أن المصفوفة A هي جذر لحدوديتها الأصغرية $m(\lambda)$.

وبالتالي نحصل على:

$$A^r + b_{r-1}A^{r-1} + \cdots + b_1A + b_0I_n = 0$$

بضرب طرفي هذه المعادلة بـ A^{-1} نجد:

$$A^{r-1} + b_{r-1}A^{r-2} + \cdots + b_1I_n + b_0A^{-1} = 0$$

ومنه:

$$A^{-1} = -\frac{1}{b_0}(A^{r-1} + b_{r-1}A^{r-2} + \cdots + b_1I_n)$$

5- العلاقة بين الحدوديتين الأصغرية والمميزة:

الحدودية الأصغرية تقسم الحدودية المميزة لمصفوفة مربعة، ودرجتها لا تتجاوز درجة الحدودية المميزة.

مبرهنة (تقبل بدون برهان):

الحدودية المميزة والحدودية الأصغرية لمصفوفة مربعة لهما الجذور نفسها عدا رتب تضاعف هذه الجذور.

6- المصفوفة المتردية وغير المتردية

نقول عن مصفوفة إنها غير متردية (Nondegenerate) إذا تطابقت درجة حدوديتها الأصغرية مع درجة حدوديتها المميزة، أما إذا كانت درجة الحدودية الأصغرية أقل من درجة الحدودية المميزة فإن المصفوفة عندئذ تسمى متردية (Degenerate).

مثال (7):

لتكن لدينا المصفوفة الحقيقية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

1. أوجد الحدودية المميزة للمصفوفة A ؟
2. أوجد الحدودية الأصغرية للمصفوفة A ؟
3. بين فيما إذا كانت المصفوفة A متردية أم لا؟
4. استفد من الحدودية الأصغرية لحساب مقلوب المصفوفة A؟

الحل:

أولاً: نوجد الحدودية المميزة للمصفوفة A

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 3 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

نجري التحويلات التالية:

- نضيف السطر الثاني إلى السطر الثالث:

$$R_2 + R_3 \to R_3$$

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda-3 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

- نضرب العمود الثاني بـ -1 نجمعه إلى العمود الثالث:

$$-C_2 + C_3 \to C_3$$

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda-3 & -\lambda+2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = -(-\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-2) = (\lambda-2)^2(\lambda-1)$$

ثانياً: نوجد الحدودية الأصغرية للمصفوفة A:

بما أن الحدودية الأصغرية تقسم الحدودية المميزة، وللحدوديتين الجذور نفسها ما عدا رتب التضاعف، وبالتالي $m(\lambda)$ هي إحدى الحدوديات:

$$(\lambda-2)(\lambda-1), (\lambda-2)^2(\lambda-1)$$

بالحساب نجد أن:

$$(A-2I)(A-I) = \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$(A-2I)(A-I) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A-2I)(A-I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي الحدودية:

$$(\lambda-2)(\lambda-1)$$

تقبل A صفراً لها، ومنه الحدودية الأصغرية لـ A هي:

$$m(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$$

ثالثاً: نلاحظ أن الحدودية الأصغرية من الدرجة الثانية والحدودية المميزة من الدرجة الثالثة، ومنه درجة الحدودية الأصغرية أقل من درجة الحدودية المميزة، والمصفوفة A متردية.

رابعاً: إن الحد الثابت للحدودية المميزة هو -4 غير معدوم، وبالتالي A قلوبة، ولإيجاد مقلوبها باستخدام الحدودية الأصغرية، نتبع ما يلي:

$$m(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$$
$$m(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2I$$
$$m(A) = 0$$
$$A^2 - 3A + 2I = 0$$

نضرب الطرفين بـ A^{-1} فنجد:

$$A^{-1}(A^2 - 3A + 2I) = 0$$

$$A - 3I + 2A^{-1} = 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(-A + 3I)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\left(-\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

مثال (8):

لتكن لدينا المصفوفة الحقيقية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

1. أوجد الحدودية المميزة للمصفوفة A ؟

2. أوجد الحدودية الأصغرية للمصفوفة A ؟

3. بين فيما إذا كانت المصفوفةA متردية أم لا؟

الحل:

أولاً: نوجد الحدودية المميزة للمصفوفة A:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2$$

ثانياً: نوجد الحدودية الأصغرية للمصفوفة A:

بما أن الحدودية الأصغرية تقسم الحدودية المميزة، وللحدوديتين الجذور نفسها ما عدا رتب التضاعف، وبالتالي $m(\lambda)$ هي إحدى الحدوديات:

$$(\lambda - 1), (\lambda - 1)^2$$

وبملاحظة أن:

$$(A - I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي الحدودية $\lambda - 1$ لا يمكن أن تكون الحدودية الأصغرية لـ A، ومنه الحدودية الأصغرية لـ A هي:

$$m(\lambda) = (\lambda - 1)^2$$

ثالثاً: نلاحظ أن الحدودية الأصغرية من الدرجة الثانية والحدودية المميزة من الدرجة الثانية ومنه درجة الحدودية الأصغرية مساوية لدرجة الحدودية المميزة، والمصفوفة A غير متردية.

مثال (9):

لتكن لدينا المصفوفة الحقيقية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

1. أوجد الحدودية المميزة للمصفوفة A ؟
2. أوجد الحدودية الأصغرية للمصفوفة A ؟
3. بين فيما إذا كانت المصفوفةA سترديه أم لا؟

الحل:

أولاً: نوجد الحدودية المميزة للمصفوفة A:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & -3 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

نجري التحويل التالي:

- نضيف السطر الثاني إلى السطر الثالث:

$$R_2 + R_3 \to R_3$$

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 0 & \lambda-3 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

نستخدم طريقة ساروس:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 0 & \lambda-3 & \lambda-2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \lambda-2 & -1 \\ 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-3 \end{matrix}$$

$$\Delta(\lambda) = [\lambda(\lambda-2)^2] - [-(\lambda-3)(\lambda-2) - (\lambda-2)]$$
$$\Delta(\lambda) = [\lambda(\lambda-2)^2] - [(\lambda-2)(-\lambda+2)]$$
$$\Delta(\lambda) = [\lambda(\lambda-2)^2] + (\lambda-2)^2$$
$$\Delta(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda+1)$$

ثانياً: نوجد الحدودية الأصغرية للمصفوفة A

بما أن الحدودية الأصغرية تقسم الحدودية المميزة، و للحدوديتين الجذور نفسها ما عدا رتب التضاعف، وبالتالي $m(\lambda)$ هي إحدى الحدوديات:

$$(\lambda-2)(\lambda+1), (\lambda-2)^2(\lambda+1)$$

بالحساب نجد أن:

$$(A-2I)(A+I)=\left(\begin{bmatrix}2&1&0\\-1&0&1\\1&3&1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}2&1&0\\-1&0&1\\1&3&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)$$

$$(A-2I)(A-I)=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&-2&1\\1&3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1&0\\-1&1&1\\1&3&2\end{bmatrix}$$

$$(A-2I)(A-I)=\begin{bmatrix}-1&1&1\\0&0&0\\-1&1&1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

وبالتالي الحدودية:

$$(\lambda-2)(\lambda+1)$$

لا يمكن أن تكون الحدودية الأصغرية لـ A، ومنه الحدودية الأصغرية لـ A هي:

$$m(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda+1)$$

ثالثاً: نلاحظ أن الحدودية الأصغرية من الدرجة الثالثة والحدودية المميزة من الدرجة الثالثة، ومنه درجة الحدودية الأصغرية مساوية لدرجة الحدودية المميزة، والمصفوفة A غير متردية.

مثال (10):

لتكن لدينا المصفوفة الحقيقية:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\-1&-1&0&0\\-2&-2&2&1\\1&1&-1&0\end{bmatrix}$$

والمطلوب:

1. أوجد الحدودية المميزة للمصفوفة A ؟
2. بيّن فيما إذا كانت المصفوفة شاذة أم لا؟
3. أوجد الحدودية الأصغرية للمصفوفة A ؟
4. بين فيما إذا كانت المصفوفةA متردية أم لا؟

الحل:

أولاً: نوجد الحدودية المميزة للمصفوفة A:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 1 & \lambda+1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = [(\lambda-1)(\lambda+1)+1][\lambda(\lambda-2)+1]-0$$

$$\Delta(\lambda) = (\lambda^2+\lambda-\lambda-1+1)(\lambda^2-2\lambda+1)$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2(\lambda-1)^2$$

ثانياً: تكون المصفوفة A شاذة إذا كان الحد الثابت في حدوديتها المميزة صفراً.

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2-2\lambda+1) = \lambda^4-2\lambda^3+\lambda^2$$

ومنه الحد الثابت في الحدودية المميزة معدوم، وبالتالي المصفوفة A شاذة.

ثالثاً: نوجد الحدودية الأصغرية للمصفوفة A.

بما أن الحدودية الأصغرية تقسم الحدودية المميزة، وللحدوديتين الجذور نفسها ما عدا رتب التضاعف، وبالتالي $m(\lambda)$ هي إحدى الحدوديات:

$$\lambda(\lambda-1), \qquad \lambda^2(\lambda-1), \qquad \lambda(\lambda-1)^2, \qquad \lambda^2(\lambda-1)^2$$

بالحساب نجد أن:

$$A(A-I) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$A(A-I) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A(A-I)=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$A^2(A-I)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -3 & 3 & 3 & 2\\ 2 & 2 & -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -2 & 0 & 0\\ -2 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$A^2(A-I)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -7 & -13 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$A(A-I)^2=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 0\\ -2 & -2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

ومنه الحدودية الأصغرية لـ A هي:

$$m(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)^2$$

رابعاً: نلاحظ أن الحدودية الأصغرية من الدرجة الرابعة والحدودية المميزة من الدرجة الرابعة، ومنه درجة الحدودية الأصغرية مساوية لدرجة الحدودية المميزة، والمصفوفة A غير متردية.

7- القيم الذاتية لمصفوفة مربعة

لتكن $A\in M_n(F)$ مصفوفة مربعة. عندئذ القيم الذاتية للمصفوفة A هي أصفار حدوديتها المميزة، أي أنها مجموعة حلول المعادلة:

$$\Delta(\lambda)=0\Rightarrow|\lambda I_n-A|=0$$

والتي ندعوها المعادلة المميزة.

8- الأشعة الذاتية لمصفوفة مربعة

لتكن $A \in M_n(F)$ مصفوفة مربعة، ولتكن $\lambda \in F$ قيمة ذاتية للمصفوفة A.
ندعو الشعاع غير الصفري $0 \neq v \in F^n$، والمحقق للشرط:

$$Av = \lambda v$$

شعاعاً ذاتياً للمصفوفة A، وندعو القيمة λ قيمة ذاتية للمصفوفة A مقابلة للشعاع الذاتي v، وندعو مجموعة القيم الذاتية للمصفوفة A بطيف المصفوفة A.

عندما تؤثر مصفوفة على شعاع ما فتقوم بتغيير كلاً من طوله وجهة دورانه. ولكن في حالة الأشعة الذاتية فإن المصفوفة تغير من طول الشعاع دون أن تقوم بتدويره (أي يبقى على الحامل نفسه).

تؤثر مصفوفة على شعاع ذاتي بضرب قيمته بعدد سلمي معين، فإذا كان هذا العدد موجباً عندها يكون للشعاع الناتج جهة الشعاع الذاتي نفسه، وإذا كان العدد سالباً، فيكون للشعاع الناتج اتجاه معاكس للشعاع الذاتي.

يمثل هذا العدد السلمي القيمة الذاتية الموافقة لذلك الشعاع الذاتي، وتمثل مقدار التغيير في طول الشعاع الذاتي.

مثال (11):

لتكن المصفوفة الحقيقية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

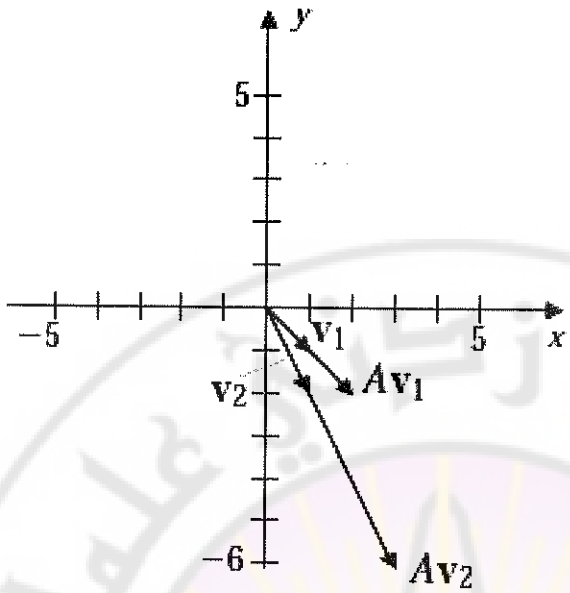
عندئذ للمصفوفة قيمتين ذاتيتين هما: $\lambda_1 = 2$ و $\lambda_2 = 3$ وتقابل الشعاعين الذاتيين $v_1 = (1, -1)$ ، و $v_2 = (1, -2)$ على الترتيب.

عندئذ:

$$Av_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = 2v_1$$

$$Av_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix} = 3v_2$$

يبين الشكل (1-4) كلاً من الأشعة Av_1, Av_2, v_1, v_2



الشكل (1−4) الأشعة $\mathbf{Av_1}, \mathbf{Av_2}, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$

ولكن في حالة أي شعاع آخر وليكن:

$$v = (1, -1)$$

فإن:

$$Av = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} \neq \lambda v$$

وبالتالي لا يوجد عدد λ إذا تم ضربة بالشعاع $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ينتج الشعاع $\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$، وبالتالي الشعاع $v = (1, -1)$ لايمكن اعتباره شعاع ذاتي للمصفوفة A.

مثال (12):

لتكن المصفوفة الحقيقية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية لها؟

الحل:

إيجاد القيم الذاتية:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 4 \\ 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2)$$

إن المعادلة المميزة لـ A هي:

$$|\lambda I_n - A| = 0$$

ومنه:

$$(\lambda + 3)(\lambda - 2) = 0$$

أي أن للمصفوفة A قيمتين ذاتيتين هما:

$$\lambda_1 = -3$$
$$\lambda_2 = 2$$

إيجاد الأشعة الذاتية:

بفرض $v = (x, y) \in R^2$ شعاعاً ذاتياً لـ A مقابلاً للقيمة الذاتية λ عندئذ:

$$Av = \lambda v$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x - 4y \\ -x - 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix}$$

نحصل على جملة المعادلات الخطية:

$$(\lambda - 1)x + 4y = 0$$
$$x - y = 0$$

1- من أجل $\lambda_1 = -3$:

نعوض في جملة المعادلات الخطية:

$$-4x + 4y = 0$$
$$x - y = 0$$

ومنه:

$$y = x$$

وللجملة عدد غير منته من الحلول هي:

$$S = \{(x, x);\ x \epsilon R\}$$
$$S = \{x(1,1);\ x \epsilon R\}$$

ومنه:

$$v_1 = (1,1)$$

شعاع ذاتي للمصفوفة A مقابل للقيمة الذاتية:

$$\lambda_1 = -3$$

2- من أجل $\lambda_2 = 2$ نعوض في جملة المعادلات الخطية:

$$x + 4y = 0$$
$$x + 4y = 0$$

ومنه:

$$x = -4y$$

وللجملة عدد غير منته من الحلول هي:

$$S = \{(-4y, y);\ y \epsilon R\}$$
$$S = \{y(-4,1);\ y \epsilon R\}$$

ومنه:

$$v_2 = (-4,1)$$

شعاع ذاتي للمصفوفة A مقابل للقيمة الذاتية:

$$\lambda_2 = 2$$

مثال (13):

لتكن المصفوفة الحقيقية:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية لها؟

الحل:

إيجاد القيم الذاتية:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix}$$
$$(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

إن المعادلة المميزة لـ A هي:

$$|\lambda I_n - A| = 0$$

ومنه

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

وهذه المعادلة مستحيلة الحل في R وبالتالي لا يوجد للمصفوفة A قيم ذاتية وبالتالي لا يوجد لها أشعة ذاتية.

مثال (14):

لتكن المصفوفة الحقيقية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية لها؟

الحل:

إيجاد القيم الذاتية:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ -3 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

إن المعادلة المميزة لـ A هي:

$$|\lambda I_n - A| = 0$$

ومنه:

$$(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

أي أن للمصفوفة A قيمتين ذاتيتين هما:

$$\lambda_1 = 1 \ , \lambda_2 = 3$$

إيجاد الأشعة الذاتية:

بفرض $v = (x, y) \in R^2$ شعاعاً ذاتياً لـ A مقابلاً للقيمة الذاتية λ عندئذ:

$$Av = \lambda v$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ 3x + 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix}$$

نحصل على جملة المعادلات الخطية:

$$(1 - \lambda)x = 0$$
$$3x + (3 - \lambda)y = 0$$

1- من أجل $\lambda_1 = 1$ نعوض في جملة المعادلات الخطية:

$$0\,x = 0$$
$$3x + 2y = 0$$

ومنه:

$$y = -\frac{3}{2}x$$

وللجملة عدد غير منته من الحلول هي:

$$S = \left\{\left(x, -\frac{3}{2}x\right);\ x \epsilon R\right\}$$
$$S = \{x\left(1, -\frac{3}{2}\right);\ x \epsilon R\}$$

ومنه:

$$v_1 = \left(1, -\frac{3}{2}\right)$$

شعاع ذاتي للمصفوفة A مقابل للقيمة الذاتية:

$$\lambda_1 = 1$$

2- من أجل $\lambda_2 = 3$ نعوض في جملة المعادلات الخطية:

$$-2x = 0$$
$$3x + 0y = 0$$

ومنه $x = 0$ وللجملة عدد غير منته من الحلول هي:

$$\mathbf{S} = \{(0, y);\ y \epsilon R\}$$
$$\mathbf{S} = \{y(0,1);\ y \epsilon R\}$$

ومنه:

$$v_2 = (0,1)$$

شعاع ذاتي للمصفوفة A مقابل للقيمة الذاتية:

$$\lambda_2 = 3$$

مثال (15):

لتكن المصفوفة الحقيقية:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية لها؟

الحل:

إيجاد القيم الذاتية:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{vmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - 5)^2(\lambda - 1)$$

إن المعادلة المميزة لـ A هي:

$$|\lambda I_n - A| = 0$$

ومنه:

$$(\lambda - 5)^2(\lambda - 1) = 0$$

أي أن للمصفوفة A قيمتين ذاتيتين هما:

$$\lambda_1 = 5\,,\ \lambda_2 = 1$$

إيجاد الأشعة الذاتية:

بفرض $v = (x, y, z) \in R^2$ شعاعاً ذاتياً لـ A مقابلاً للقيمة الذاتية λ عندئذ:

$$Av = \lambda v$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3x-2y \\ -2x+3y \\ 5z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix}$$

نحصل على جملة المعادلات الخطية:

$$(3-\lambda)x-2y=0$$
$$-2x+(3-\lambda)y=0$$
$$(5-\lambda)z=0$$

1- من أجل $\lambda_1 = 5$ نعوض في جملة المعادلات الخطية:

$$-2\,x-2y=0$$
$$0z=0$$

ومنه:

$$y=-x$$

وللجملة عدد غير منته من الحلول هي:

$$S=\{(x,-x,z);\ x,z\epsilon R\}$$
$$S=\{(x,-x,0)+(0,0,z);\ x,z\epsilon R\}$$
$$S=\{x(1,-1,0)+z(0,0,1);\ x,z\epsilon R\}$$

ومنه:

$$v_1=(1,-1,0)$$
$$v_2=(0,0,1)$$

شعاعان ذاتيان للمصفوفة A مقابلان للقيمة الذاتية:

$$\lambda_1=5$$

2- من أجل $\lambda_2 = 1$ نعوض في جملة المعادلات الخطية:

$$2x-2y=0$$
$$-2x+2y=0$$
$$4z=0$$

ومنه:

$$x=y, z=0$$

وللجملة عدد غير منته من الحلول هي:

$$S = \{(y, y, 0);\ y \epsilon R\}$$
$$S = \{y(1,1,0);\ y \epsilon R\}$$

ومنه:

$$v_3 = (1,1,0)$$

شعاع ذاتي للمصفوفة A مقابل للقيمة الذاتية:

$$\lambda_2 = 1$$

9- المصفوفات المتشابهة

نقول عن مصفوفة مربعة $A \in M_n(F)$ إنها مشابهة للمصفوفة المربعة $D \in M_n(F)$ (Similar Matrices)، إذا وجدت مصفوفة عكوسة (غير شاذة):

$$P \in M_n(F)$$

بحيث:

$$P^{-1}AP = D$$

وندعو المصفوفة P المصفوفة المقطرة للمصفوفة A.

ملاحظة:

إن المصفوفات المتشابهة لها الحدودية المميزة ذاتها.

مبرهنة:

تتطابق الحدودية المميزة لمصفوفة مربعة A مع الحدودية المميزة لأي مصفوفة مشابهة لها.

10- تقطير مصفوفة

نقول عن مصفوفة مربعة $A \in M_n(F)$ إنها قطورة (قابلة للتقطير، قطرية) (Diagonalizable Matrix) إذا كانت تشابه مصفوفة قطرية $D \in M_n(F)$.

وبشكل آخر نقول عن مصفوفة مربعة $A \in M_n(F)$ إنها قطورة إذا أمكن إيجاد مصفوفة عكوسة:

$$P \in M_n(F)$$

بحيث:

$$D = P^{-1}AP$$

مصفوفة قطرية.

10- 1 الارتباط الخطي والاستقلال الخطي

- نقول عن مجموعة من الأشعة $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ من R^n إنها مرتبطة خطياً (Linear Dependence)، إذا وجدت أعداد $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in R$ ليست جميعها أصفاراً بحيث يتحقق:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_{2+} \dots + \alpha_m v_m = 0$$

- نقول عن مجموعة من الأشعة $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ من R^n إنها مستقلة خطياً (Linear Independence)، إذا تحقق الشرط التالي:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_{2+} \dots + \alpha_m v_m = 0 \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in R$$

ملاحظة:

يمكن استخدام المحددات لدراسة ارتباط مجموعة مكونة من n شعاع معرفة على R^n كما يلي:

- نقول عن مجموعة من الأشعة $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ من R^n إنها مستقلة خطياً إذا كان المحدد المكون من مجموعة الأشعة لا يساوي الصفر، أي:

$$\begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix} \neq 0$$

- نقول عن مجموعة من الأشعة $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ من R^n إنها مرتبطة خطياً إذا كان المحدد المؤلف من مجموعة الأشعة يساوي الصفر:

$$\begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix} = 0$$

مبرهنة:

تكون المصفوفة المربعة $A \in M_n(F)$ قطورة إذا وفقط إذا كانت تملك n شعاعاً ذاتياً مستقلاً خطياً. وتكون العناصر القطرية للمصفوفة المقطرة هي القيم الذاتية المقابلة للأشعة الذاتية.

مبرهنة:

إذا كانت المصفوفة المربعة $A \in M_n(F)$ تملك n قيمة ذاتية مختلفة (متمايزة)، فإن المصفوفة A قطوره.

مبرهنة:

تكون المصفوفة المربعة $A \in M_n(F)$ **قطورة** إذا وفقط إذا كانت حدوديتها الأصغرية فروقة على F على شكل جداء حدوديات من الدرجة الأولى، أي:

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_r)\ ;\ 1 \le r \le n$$

حيث: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ مختلفة (متمايزة) في F.

10-2 خطوات تقطير مصفوفة مربعة

خطوات تقطير مصفوفة $A \in M_n(F)$ هي التالي:

1. نحسب القيم الذتية للمصفوفة A ولتكن:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F$$

2. نوجد الأشعة الذاتية المقابلة للقيم الذاتية ولتكن:

$$v_1, v_2, \dots, v_n$$

3. نبحث في استقلال الأشعة الذاتية، فإذا كانت الأشعة مستقلة خطياً وعددها n فالمصفوفة قطورة.
4. نشكل المصفوفة P التي أعمدتها هي الأشعة الذاتية للمصفوفة A.
5. إن المصفوفة الناتجة:

$$P^{-1}AP = D$$

هي مصفوفة قطرية:

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

ويمكن التحقق من ذلك.

مثال (16):

لتكن المصفوفة الحقيقية:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة المقطرة لها، ثم تحقق من علاقة التشابه ؟

الحل:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

إن المعادلة المميزة لـ A هي:

$$|\lambda I_n - A| = 0$$

ومنه:

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

أي أن للمصفوفة A قيمتين ذاتيتين هما:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2$$

إيجاد الأشعة الذاتية:

بفرض $v = (x, y) \in R^2$ شعاعاً ذاتياً لـ A مقابلاً للقيمة الذاتية λ عندئذ:

$$Av = \lambda v$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3x + 2y \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix}$$

نحصل على جملة المعادلات الخطية:

$$(3 - \lambda)x + 2y = 0$$

$$-x - \lambda y = 0$$

1- من أجل $\lambda_1 = 1$ نعوض في جملة المعادلات الخطية:

$$2x + 2y = 0$$
$$-x - y = 0$$

ومنه:

$$y = -x$$

وللجملة عدد غير منته من الحلول هي:

$$S = \{(x, -x);\ x \epsilon R\}$$
$$S = \{x(1, -1);\ x \epsilon R\}$$

ومنه:

$$v_1 = (1, -1)$$

شعاع ذاتي للمصفوفة A مقابل للقيمة الذاتية:

$$\lambda_1 = 1$$

2- من أجل $\lambda_2 = 2$ نعوض في جملة المعادلات الخطية:

$$x + 2y = 0$$
$$-x - 2y = 0$$

ومنه:

$$x = -2y$$

وللجملة عدد غير منته من الحلول هي:

$$S = \{(-2y, y);\ y \epsilon R\}$$
$$S = \{y(-2,1);\ y \epsilon R\}$$

ومنه:

$$v_2 = (-2,1)$$

شعاع ذاتي للمصفوفة A مقابل للقيمة الذاتية:

$$\lambda_2 = 2$$

إن المحدد:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

والأشعة مستقلة خطياً، والمصفوفة A قطورة.

نشكل المصفوفة P:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

نحسب P^{-1}:

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|} \operatorname{adj} P$$

$$P^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

التحقق من علاقة التشابه:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{diag}(-1, -1)$$

والناتج مصفوفة قطرية.

مثال (17):

بيّن فيما إذا كانت المصفوفة **الحقيقية التالية قطورة:**

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

وإذا كانت قطورة فأوجد المصفوفة **المقطورة لها؟**

الحل:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & -2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$$

إن المعادلة المميزة لـ A هي:

$$|\lambda I_n - A| = 0$$

ومنه

$$(\lambda + 1)^2 = 0$$

أي أن للمصفوفة A قيمة ذاتية **وحيدة هي:**

$$\lambda = -1$$

إيجاد الأشعة الذاتية:

بفرض $v = (x, y) \in R^2$ شعاعاً ذاتياً لـ A مقابلاً للقيمة الذاتية λ عندئذ:

$$Av = \lambda v$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3x + 2y \\ -2x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix}$$

نحصل على جملة المعادلات الخطية:

$$(-3 - \lambda)x + 2y = 0$$
$$-2x + (1 - \lambda)y = 0$$

من أجل $\lambda = -1$ نعوض في جملة المعادلات الخطية، فنحصل:

$$-2x + 2y = 0$$

ومنه:

$$y = x$$

وللجملة عدد غير منته من الحلول هي:

$$S = \{(x, x);\ x \epsilon R\}$$
$$S = \{x(1,1);\ x \epsilon R\}$$

ومنه:

$$v_1 = (1,1)$$

شعاع ذاتي للمصفوفة A مقابل للقيمة الذاتية:

$$\lambda = -1$$

وبالتالي لا يوجد شعاعين ذاتيين مستقلين خطياً لـ A، و هذا يعني أن المصفوفة A غير قطورة.

3-10 قوى مصفوفة قطورة

أحد التطبيقات الهامة للمصفوفة القطورة هو حساب القوى الصحيحة لها (Power of Diagonalizable Matrix).

إذا كانت المصفوفة المربعة $A \in M_n(F)$ قطورة، فإنه يوجد مصفوفة عكوسة $P \in M_n(F)$ بحيث:

$$D = P^{-1}AP$$

مصفوفة قطرية.

ومنه:

$$D = P^{-1}AP \Rightarrow A = P^{-1}DP$$

من أجل العدد الصحيح الموجب r، فإن:

$$A^r = (P^{-1}DP)^r$$
$$A^r = (P^{-1}DP)(P^{-1}DP) \dots (P^{-1}DP)(P^{-1}DP)$$
$$A^r = P^{-1}D^rP$$

مثال (18):

لتكن المصفوفة الحقيقية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

أثبت أنها قطورة، وإذا كانت قطورة استفد من ذلك لحساب A^n؟

الحل:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -4 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 10 = (\lambda - 5)(\lambda + 2)$$

إن المعادلة المميزة لـ A هي:

$$|\lambda I_n - A| = 0$$

ومنه:

$$(\lambda - 5)(\lambda + 2) = 0$$

أي أن للمصفوفة A قيمتين ذاتيتين هما:

$$\lambda_1 = 5 \quad , \quad \lambda_2 = -2$$

إيجاد الأشعة الذاتية:

بفرض $v = (x, y) \in R^2$ شعاعاً ذاتياً لـ A مقابلاً للقيمة الذاتية λ عندئذ:

$$Av = \lambda v$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x + 3y \\ 4x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix}$$

نحصل على جملة المعادلات الخطية:

$$(1 - \lambda)x + 3y = 0$$
$$4x + (2 - \lambda)y = 0$$

1- من أجل $\lambda_1 = 5$ نعوض في جملة المعادلات الخطية:

$$-4x + 3y = 0$$
$$4x - 3y = 0$$

ومنه:

$$y = 4/3\, x$$

وللجملة عدد غير منته من الحلول هي:

$$S = \{(x, 4/3\, x);\ x \epsilon R\}$$
$$S = \{x(1, 4/3);\ x \epsilon R\}$$

ومنه:

$$v_1 = (1, 4/3)$$

شعاع ذاتي للمصفوفة A مقابل للقيمة الذاتية:

$$\lambda_1 = 5$$

2- من أجل $\lambda_2 = -2$ نعوض في جملة المعادلات الخطية:

$$3x + 3y = 0$$
$$4x + 4y = 0$$

ومنه:

$$y = -x$$

وللجملة عدد غير منته من الحلول هي:

$$S = \{(x, -x);\ y \epsilon R\}$$
$$S = \{x(1, -1);\ y \epsilon R\}$$

ومنه:

$$v_2 = (1, -1)$$

شعاع ذاتي للمصفوفة A مقابل للقيمة الذاتية:

$$\lambda_2 = -2$$

إن المحدد:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4/3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 4/3 = -1/3 \neq 0$$

والأشعة مستقلة خطياً، والمصفوفة A قطورة.

نشكل المصفوفة P:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4/3 & -1 \end{bmatrix}$$

نحسب P^{-1}:

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|} \operatorname{adj} P$$

$$P^{-1} = -3/7 \begin{bmatrix} -1 & -4/3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$P^{-1} = -3/7 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow D^n = \begin{bmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{bmatrix}$$

$$A^n = P^{-1} D^n P$$

$$A^n = -3/7 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4/3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = -3/7 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4/3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = 1/7 \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4/3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = 1/7 \begin{bmatrix} 3(5^n) & 3(-2)^n \\ 4(5^n) & -3(-2)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4/3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = 1/7\begin{bmatrix} 3(5^n)+4(-2)^n & 3(5^n)-3(-2)^n \\ 4(5^n)-4\,(-2)^n & 4(5^n)+\ \ 3(-2)^n \end{bmatrix}$$

مثال (19):

لتكن المصفوفة الحقيقية:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

أثبت أنها قطورة، وإذا كانت قطورة استفد من ذلك لحساب A^n؟

الحل:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -6 & 0 \\ 3 & \lambda+5 & 0 \\ 3 & 6 & \lambda+5 \end{vmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = (\lambda+5)(\lambda+2)(\lambda-1)$$

إن المعادلة المميزة لـ A هي:

$$|\lambda I_n - A| = 0$$

ومنه:

$$(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda+5) = 0$$

أي أن للمصفوفة A ثلاث قيم ذاتية هي:

$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = -2$$
$$\lambda_3 = -5$$

إيجاد الأشعة الذاتية:

بفرض $v = (x, y, z) \in R^3$ شعاعاً ذاتياً لـ A مقابلاً للقيمة الذاتية λ عندئذ:

$$Av = \lambda v$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4x+6y \\ -3x-5y \\ -3x-6y-5z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix}$$

نحصل على جملة المعادلات الخطية:

$$(4-\lambda)x+6y=0$$
$$-3x+(-5-\lambda)y=0$$
$$-3x-6y+(-5-\lambda)z=0$$

1- من أجل $\lambda_1 = 1$ نعوض في جملة المعادلات الخطية:

$$3x+6y=0$$
$$-3x-6y=0$$
$$-3x-6y-6z=0$$

ومنه:

$$x=-2y$$
$$z=0$$

وللجملة عدد غير منته من الحلول هي:

$$S=\{(-2y,y,0);\ y\epsilon R\}$$
$$S=\{y(-2,1,0);\ y\epsilon R\}$$

ومنه:

$$v_1=(-2,1,0)$$

شعاع ذاتي للمصفوفة A مقابل للقيمة الذاتية:

$$\lambda_1=1$$

2- من أجل $\lambda_2 = -2$ نعوض في جملة المعادلات الخطية:

$$6x+6y=0$$
$$-3x-3y=0$$
$$-3x-6y-3z=0$$

ومنه:

$$y=-x$$
$$z=x$$

وللجملة عدد غير منته من الحلول هي:

$$S = \{(x, -x, x);\ x \epsilon R\}$$
$$S = \{x(1, -1, 1);\ x \epsilon R\}$$

ومنه:

$$v_2 = (1, -1, 1)$$

شعاع ذاتي للمصفوفة A مقابل للقيمة الذاتية:

$$\lambda_2 = -2$$

3- من أجل $\lambda_2 = -5$ نعوض في جملة المعادلات الخطية:

$$9x + 6y = 0$$
$$-3x = 0$$
$$-3x - 6y - 0z = 0$$

ومنه:

$$x = 0$$
$$y = 0$$

وللجملة عدد غير منته من الحلول هي:

$$S = \{(0,0,z);\ z \epsilon R\}$$
$$S = \{z(0,0,1);\ z \epsilon R\}$$

ومنه:

$$v_3 = (0,0,1)$$

شعاع ذاتي للمصفوفة A مقابل للقيمة الذاتية:

$$\lambda_2 = -5$$

إن المحدد:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(2-1) = 1$$

والأشعة مستقلة خطياً، والمصفوفة A قطورة.

لنشكل المصفوفة P:

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نحسب P^{-1}:

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|}\operatorname{adj} P$$

$$P^{-1} = 1/1\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow D^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-5)^n \end{bmatrix}$$

$$A^n = P^{-1}D^nP$$

$$A^n = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-5)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} -1 & -(-2)^n & 0 \\ -1 & -2(-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-5)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} -2-(-2)^n & -1+(-2)^n & 0 \\ 2-2(-2)^n & -1+2(-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-5)^n \end{bmatrix}$$

مثال (21):

لتكن المصفوفة الحقيقية:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

1. أوجد الحدودية المميزة للمصفوفة A ؟
2. أوجد الحدودية الأصغرية للمصفوفة A ؟
3. بين فيما إذا كانت المصفوفة A قطورة؟

الحل:

أولاً: نوجد الحدودية المميزة للمصفوفة A:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

لنجري التحويلات التالية:

- نضيف السطر الثاني إلى السطر الأول، و نضيف السطر الثاني إلى السطر الثالث:

$$R_2 + R_1 \to R_1$$
$$R_2 + R_3 \to R_3$$

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & \lambda-2 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

ننشر وفق عناصر السطر الأول فنجد:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= (\lambda-2)(\lambda-1)^2 - (\lambda-1)(\lambda-2) \\ &= (\lambda-2)^2(\lambda-1) \end{aligned}$$

ثانياً: نوجد الحدودية الأصغرية للمصفوفة A:

بما أن الحدودية الأصغرية تقسم الحدودية المميزة، وللحدوديتين الجذور نفسها ما عدا رتب التضاعف، وبالتالي $m(\lambda)$ هي إحدى الحدوديات:

$$(\lambda-2)(\lambda-1)$$
$$(\lambda-2)^2(\lambda-1)$$

بالحساب نجد أن:

$$(A-2I)(A-I)=\left(\begin{bmatrix}3&2&1\\-1&0&-1\\1&1&2\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{bmatrix}3&2&1\\-1&0&-1\\1&1&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)$$

$$(A-2I)(A-I)=\begin{bmatrix}1&2&1\\-1&-2&-1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&1\\-1&-1&-1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

$$(A-2I)(A-I)=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&-1&0\\1&1&0\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

وبالتالي الحدودية:

$$(\lambda-2)(\lambda-1)$$

لا يمكن أن تكون الحدودية الأصغرية لـ A ، ومنه الحدودية الأصغرية لـ A هي:

$$m(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$$

وبالتالي المصفوفة A ليست فروقة على R إلى جداء حدوديات من الدرجة الأولى بالنسبة لـ λ، وهذا يعني أن المصفوفة غير قطورة.

تمارين

السؤال الأول:

لتكن لدينا المصفوفتين الحقيقيتين التاليتين:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

برهن أن للمصفوفتين القيم الذاتية نفسها، ولكنهما غير متشابهتين؟

السؤال الثاني:

لتكن لدينا المصفوفتين الحقيقيتين التاليتين:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

برهن أن للمصفوفتين حدوديتين مميزتين مختلفتين، ولكن لهما نفس الحدودية الأصغرية؟

السؤال الثالث:

لتكن لدينا المصفوفتين الحقيقيتين التاليتين:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

أوجد الحدودية المميزة والحدودية الأصغرية لكل منهما، وإذا كانت المصفوفة غير شاذة أوجد مقلوبها، وذلك بالاستفادة من الحدودية الأصغرية؟

السؤال الرابع:

لتكن لدينا المصفوفة الحقيقية التالية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

1- أوجد الحدودية المميزة والحدودية الأصغرية لها، وإذا كانت مصفوفة غير شاذة؟

2- أوجد مقلوبها، وذلك بالاستفادة من الحدودية الأصغرية؟

السؤال الخامس:

لتكن لدينا المصفوفة الحقيقية التالية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

1- أوجد الحدودية المميزة والحدودية الأصغرية لها، وإذا كانت مصفوفة غير شاذة؟

2- أوجد مقلوبها، وذلك بالاستفادة من الحدودية الأصغرية؟

السؤال السادس:

لتكن لدينا المصفوفة الحقيقية التالية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 7 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

1- أوجد الحدودية المميزة والحدودية الأصغرية لها؟

2- وإذا كانت مصفوفة غير شاذة أوجد مقلوبها، وذلك بالاستفادة من الحدودية الأصغرية؟

السؤال السابع:

لتكن لدينا المصفوفة الحقيقية التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

أوجد اعتماداً على الحدودية الأصغرية مقلوبها؟

السؤال الثامن:

لتكن لدينا المصفوفة الحقيقية التالية:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

والمطلوب: أوجد اعتماداً على الحدودية الأصغرية مقلوبها؟

السؤال التاسع:

لتكن لدينا المصفوفة الحقيقية التالية:

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

أوجد اعتماداً على الحدودية الأصغرية مقلوبها؟

السؤال العاشر:

لتكن لدينا المصفوفة التالية والمعرفة على حقل الأعداد العقدية:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

1- أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية لها؟

2- بين فيما إذا كانت قطورة، وقطرها إن أمكن؟

السؤال الحادي عشر:

لتكن لدينا المصفوفة التالية والمعرفة على حقل الأعداد العقدية:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

1- أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية لها؟

2- بين فيما إذا كانت قطورة، وقطرها إن أمكن؟

السؤال الثاني عشر:

لتكن لدينا المصفوفة التالية والمعرفة على حقل الأعداد العقدية:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

1- أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية لها؟

2- بين فيما إذا كانت قطورة، وقطرها إن أمكن؟

السؤال الثالث عشر:

لتكن لدينا المصفوفة التالية والمعرفة على حقل الأعداد العقدية:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

1- أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية لها؟

2- بين فيما إذا كانت قطورة، وقطرها إن أمكن؟

السؤال الرابع عشر:

لتكن لدينا المصفوفة التالية والمعرفة على حقل الأعداد العقدية:

$$\begin{bmatrix} -3 & 10 & -6 \\ 0 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

1- أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية لها؟

2- بين فيما إذا كانت قطورة، وقطرها إن أمكن؟

السؤال الخامس عشر:

لتكن لدينا المصفوفة التالية والمعرفة على حقل الأعداد العقدية:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -6 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية لها، وبين فيما إذا كانت قطورة، وقطرها إن أمكن؟

السؤال السادس عشر:

لتكن لدينا المصفوفات الحقيقية التالية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

أوجد القوة النونية لكل منها؟

الإحصاء الوصفي

1- مقدمة في علم الإحصاء

يُعدّ علم الإحصاء (Statistics) واحداً من أهم العلوم الحديثة التي تسعى إلى حصر وتنظيم البيانات المتعلقة بمجالات الحياة اليومية كافة. حيث يستخدم علم الإحصاء في مجالات متنوعة تشمل ميادين عديدة كالصناعة والتجارة والزراعة والطب والبحوث والإدارة وجميع المجالات الأخرى دون استثناء.

فعلى سبيل المثال، يتم تطبيق الأساليب الإحصائية في الجوانب المختلفة للصناعة كمراقبة جودة المنتجات وتسويقها والتخزين وتشغيل خطوط الإنتاج.

كما يستخدم علم الإحصاء في المجال الطبي لدراسة الأمراض المختلفة والبحث في مسبباتها وطرق علاجها.

أما في مجال الأعمال والتجارة فإن علم الإحصاء يلعب دوراً حيوياً يتمثل في دراسة السوق والأسعار وكميات الإنتاج وغير ذلك.

اتجهت الدراسات الأكاديمية والبحثية ولاسيما التطبيقية إلى استخدام علم الإحصاء من خلال حصر بيانات مشكلة البحث والتعامل معها إحصائياً للوصول إلى فهم أفضل وحلول موضوعية.

يمثل علم الإحصاء الأداة العلمية التي يتم من خلالها جمع البيانات ومن ثم وصفها باستخدام الجداول والرسوم البيانية وذلك بهدف إبراز المعلومة المحتواة في البيانات والتي يصعب قراءتها من خلال البيانات مباشرة.

مع تطور تقنيات الحاسوب يتم تحليل البيانات بطرق علمية متطورة يمكن من خلالها قراءة المعلومات الموجودة في البيانات بدقة ومصداقية عالية.

إن كلمة Statistics مشتقة من كلمة Status وتعني الدولة باللاتينية أو كلمة Statistica بالإيطالية وتعني الدولة أيضاً. حيث أطلق على الطرق التي تعنى

بتنظيم البيانات وتلخيصها ووضعها في صورة جداول أو رسم بياني حتى يسهل الرجوع إليها والاستفادة منها بأسرع وقت ممكن بعلم الدولة أو علم الملوك ثم علم الإحصاء.

2- تعريف علم الإحصاء

علم الإحصاء هو العلم الذي يهتم بطرق جمع البيانات وأساليب وصفها وتحليلها بهدف استخراج المعلومات والحقائق تمهيداً لاتخاذ قرارات معينة.

ويتكون علم الإحصاء من قسمين هما:

الإحصاء الوصفي (Descriptive Statistics) والإحصاء الاستدلالي (Inferential Statistic).

- الإحصاء الوصفي: هو الطرق الخاصة بتنظيم وتلخيص المعلومات من خلال أشكال بيانية سهلة القراءة، وتتضمن الطرق الوصفية على توزيعات تكرارية (الجداول التكرارية) ورسوم بيانية وطرق حساب مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت ومختلف القياسات الأخرى.
- الإحصاء الاستدلالي: هو الطرق العلمية التي تعمل باستخلاص الاستنتاجات عن معالم المجتمع بناء على معلومات التي يتم الحصول عليها من العينة المأخوذة منه، وذلك وفق الطرق الإحصائية المعلومة.

3- مفاهيم أساسية في علم الإحصاء

يتألف علم الإحصاء من المفاهيم الأساسية (Fundamental Concepts) التالية:

3-1 المجتمع الإحصائي

يعرّف المجتمع الإحصائي على أنه مجموعة من الأفراد محل الدارسة والتي لها خصائص مشتركة.

يقسم المجتمع الإحصائي إلى قسمين:

- مجتمع محدود: وهو المجتمع الذي يكون فيه عدد محدود من الأفراد مثل عدد أجهزة الكمبيوتر في المخبر، عدد الطلاب في الفئة الواحدة، وغير ذلك.
- مجتمع غير محدود: وهو المجتمع الذي يكون فيه عدد الأفراد غير منته مثل عدد سكان العالم، وعدد المواليد من الذكور أو الإناث وغير ذلك.

2-3 العينة الإحصائية

قد يكون من الصعب ملاحظة بيانات جميع أفراد المجتمع لما يكلف ذلك من جهد ووقت ومال، وقد يكون في بعض الأحيان استحالة ذلك مثل فحص دم المريض، وللتغلب على ذلك يمكن اختيار جزء من المجتمع يسمى بالعينة.

تعرّف العيّنة بأنها مجموعة جزئية من المجتمع، ويتم اختيارها بحيث تمثل صفات المجتمع جميعها وينفرد بها فرع خاص من علم الإحصاء يسمى نظرية العينات.

فمثلاً، أخذ عينة من دم مريض لفحصها، حيث أننا لا نستطيع فحص كل دم المريض لأن ذلك يؤدي إلى وفاته.

وفحص سلامة كمية من البيض، يتطلب أخذ عينة منها ثم نقوم بكسرها وذلك **للتأكد من سلامة البيض** من عدمه.

أفضل العينات هي التي:

- **تمثل المجتمع أفضل** تمثيل
- **تؤخذ من المجتمع بطريقة** عشوائية، و المقصود بالعشوائية هنا أن يتم اختيار العناصر **بفعل المصادفة البحتة**، أي يكون لكل عنصر من عناصر المجتمع نفس فرصة الظهور.
- تكون تكلفة أخذها معقولة نسبياً.

تفيد المعلومات المتوفرة من العينات في التنبؤ بمعلومات ومؤشرات عن المجتمع كله.

وللعينة الإحصائية أنواع، هي:

1- العينة العشوائية البسيطة:

تستخدم العينة العشوائية البسيطة في حالة المجتمعات المتجانسة حيث تكون الاختلافات بين عناصر المجتمع صغيرة نسبياً.

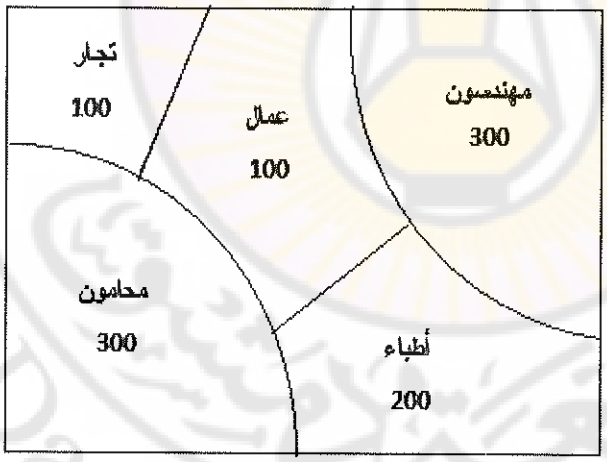
ومن أفضل طرق تطبيق العينة العشوائية البسيطة استخدام الحاسوب في توليد الأرقام العشوائية.

2- العينة الطبقية:

تستخدم العينة الطبقية في حالة المجتمعات غير المتجانسة والتي يمكن تقسيمها إلى طبقات، حيث تكون العناصر داخل كل طبقة متجانسة فيما بينها، بينما تختلف العناصر من طبقة إلى طبقة أخرى من حيث التجانس.

مثال (1):

يوضح الشكل (5-1) طبيعة البيانات داخل وبين الطبقات المختلفة في مجتمع غير متجانس مكون من خمس طبقات.



الشكل (5-1) طبيعة البيانات داخل وبين الطبقات المختلفة

فلدراسة ظاهرة الدخل مثلاً في المجتمع السابق ونظراً لتفاوت الدخول بين الطبقات المختلفة من عمال - مهندسين- محامين..الخ، يتم تقسيم المجتمع إلى

طبقات يكون التفاوت في الدخول داخل هذه الطبقات قليلاً جداً، بينما تختلف الدخول اختلافاً جوهرياً بين الطبقات المختلفة.

يتم تحديد عدد العينات المطلوب سحبها من الطبقات المختلفة بنسب تمثيل هذه الطبقات في مجتمع الدراسة، فمثلاً إذا كانت نسبة طبقة العمال إلى طبقة المهندسين إلى طبقة التجار إلى طبقة الأطباء إلى طبقة المحامين هي:

$$300:200:100:300:100$$
$$3:2:1:3:1$$

إذا كان المطلوب سحب عينة مكونة من مئة عنصر من المجتمع فإننا نحسب أولاً عدد العينات المختلفة بالطريقة التالية:

حساب مجموع النسب $3+2+1+3+1=10$

وتكون قيمة كل نسبة $100/10=10$

وبالتالي يكون عدد عناصر كل عينة من كل طبقة كما يلي:

طبقة العمال: $1 \times 10 = 10$

طبقة المهندسين: $3 \times 10 = 30$

طبقة التجار: $1 \times 10 = 10$

طبقة الأطباء: $2 \times 10 = 20$

طبقة المحامين: $3 \times 10 = 30$

ومن ثم نطبق أسلوب العينة العشوائية البسيطة لسحب العينات السابقة من كل طبقة.

3- العينة المنتظمة:

يستخدم هذا الأسلوب من أساليب جمع العينات في المجتمعات التي يتوفر فيها شرط التجانس، ولكن يجب أن يكون حجم المجتمع محدوداً، وفي هذه الحالة يتم سحب العناصر بسهولة وسرعة مقارنة بالطرق الأخرى.

تتركز عملية سحب العناصر اللازمة على أمرين أساسيين هما:

- عنصر العشوائية ويتمثل هذا الشرط في سحب أول عنصر في العينة.
- عنصر الانتظام ويتمثل هذا الشرط في سحب بقية عناصر العينة.

مثال(2):

إذا كان مجتمع الدراسة مكوناً من خمسين عنصراً، وكان المطلوب سحب عينة مكونة من عشرة عناصر باستخدام أسلوب العينة المنتظمة.

بفرض سحب عنصر واحد من كل مجموعة، وبالتالي سيكون لدينا عشر مجموعات، ويتم حساب عدد عناصر كل مجموعة من المجموعات من القانون :

$$\text{عدد عناصر المجموعة} = \frac{\text{عدد عناصر المجتمع}}{\text{عدد عناصر العينة}}$$

وبالتالي عدد عناصر المجموعة هو:

$$\frac{50}{10} = 5$$

وعليه يتم اختيار العنصر الأول من المجموعة بطريقة عشوائية وليكن العنصر الثاني، بعد ذلك يتم سحب ثاني عنصر من كل مجموعة لاستكمال سحب العينة المطلوبة تحت شروط الانتظام كما هو موضح:

المجموعة الأولى	المجموعة الثانية	المجموعة الثالثة
1 2 3 4 5	6 7 8 9 10	11 12 13 14 15 .....
العنصر الأول	العنصر الثاني	العنصر الثالث

3-3 البيانات

تعرّف البيانات بأنها مجموعة من المشاهدات أو الملاحظات التي تؤخذ أثناء دراسة معينة. وقد تكون بيانات رقمية كمية (Quantitative) مثل أطوال وأوزان مجموعة من الطلاب أو بيانات غير رقمية وصفية (Descripttive) مثل لون البشرة والجنس والحالة الاجتماعية وغير ذلك.

3-4 الوسيط والإحصائية

الوسيط:

هو شيء يميز المجتمع ككل، وذلك مثل متوسط الدخل الشهري للأسر في دولة معينة، أو نسبة المدخنين في مجتمع معين..وهكذا.

الإحصائية:

هي شيء يميز العينة مثل متوسط الدخل الشهري لعينة مكونة من 50 أسرة في دولة ما، أو متوسط الطول لعينة مكونة من 50 طالب في مدرسة ما.

3-5 مصادر جمع البيانات الإحصائية

يوجد مصدران لجمع البيانات الإحصائية:

أولاً: تاريخي:

هو ما يؤخذ من السجلات المحفوظة مثل سجلات المواليد والوفيات.

ثانياً: ميداني:

يتم جمع البيانات مباشرة عن طريق اتصال الباحث بالوحدة محل الدراسة (شخص- هيئة- تجربة علمية-...الخ).

يتم جمع البيانات ميدانياً عن طريق الوسائل التالية:

1- المقابلة الشخصية:

حيث يقوم الباحث بالاتصال المباشر بالأشخاص محل الدراسة، وهذه الطريقة قد تكون مكلفة ولاسيما في حالة العينات كبيرة الحجم.

2- الاستمارة الإحصائية:

وفيها يقوم الباحث بتصميم استمارة تشمل العديد من الأسئلة الرئيسية والفرعية التي تحقق جميع الأهداف للبحث محل الدراسة.

ويُراعى في هذه الاستمارة الشروط التالية:

- يجب أن تكون الأسئلة واضحة وسهلة.
- يجب أن تكون الاستمارة غير طويلة؛ حتى لا يصاب الشخص محل الدراسة بالملل والضيق.
- يجب التأكيد أن تشمل الاستمارة على بعض الأسئلة المكررة في أكثر من موضع تحقيقاً لمصداقية الشخص محل الدراسة.
- يجب أن تحقق الاستمارة الأهداف محل الدراسة.

ويجب على الباحث، بعد إعداد الاستمارة، أن يقوم باختبارها عن طريق أخذه لعينة صغيرة جداً وذلك للتحقق من جميع الشروط السابقة.

وبعد جمع البيانات سواء من المصادر التاريخية أو من المصادر الميدانية، فإنها تكون بيانات خاماً غير منظمة، يصعب دراستها أو استنتاج أي شيء منها.

3-6 أنواع البيانات الإحصائية

تنقسم البيانات الإحصائية إلى نوعين أساسيين:

- بيانات وصفية (غير رقمية) Qualitative.
- بيانات كمية (رقمية) Quantitative.

كما تنقسم البيانات الوصفية بدورها إلى قسمين رئيسيين هما:

1- بيانات وصفية اسمية:

تشير إلى حقول مختلفة لا تمثل ترتيباً محدداً. فمثلاً الحالة الاجتماعية يمكن تصنيفها إلى أعزب، ومتزوج، ومطلق، وأرمل دون أن يكون هنالك حاجة إلى ترتيبها بشكل محدد.

2- بيانات وصفية ترتيبية:

تمثل حقول تشير إلى ترتيب محدد لا يمكن تجاهله. فمثلاً المستوى التعليمي يعكس ترتيباً محدداً حيث يتم مثلاً ذكر حقل "غير متعلم" يليه "ابتدائي" يليه "إعدادي" يليه " ثانوي" ثم "جامعي".

إن معظم العمليات الإحصائية تتم من خلال التعامل مع أرقام أكثر من التعامل مع كلمات أو صفات. وحتى في عملية التعامل مع الصفات فإنه يكون غالباً في دراسة التكرارات أو عدد مرات ظهور الصفة والتي يمكن تسجيلها كمياً.

تختلف البيانات الكمية تبعاً لاختلاف القراءات للبيان الإحصائي، فالبيانات التي تأخذ أرقاماً محددة تمثل بيانات كمية متقطعة، بينما البيانات الكمية التي تأخذ قيماً محصورة في فترة محددة تمثل بيانات كمية متصلة (أو مستمرة).

فمثلاً، يمثل عدد الحوادث المرورية بياناً كمياً متقطعاً يأخذ قيماً بصيغ أعداد صحيحة لا تقبل كسوراً أي بدون أي تقريب حسابي.

بينما يمثل وزن الطفل أو التكاليف المادية للحوادث بياناً كمياً متصلاً. غالباً ما يتم التقريب لدرجة معينة للحصول على قيمة يمكن التعامل معها.

وبالرجوع إلى وزن الطفل، نفترض أن الحد الأعلى لأوزان الأطفال لا يتجاوز 20 كغ مما ينتج عنه الفترة $[0, 0.02]$ كنطاق لقيم البيان.

وفي هذه الحالة يوجد عدد لا نهائي من القيم للبيان الكمي والذي يقع في تلك الفترة، ولا يمكن التعبير عن تلك القيم بشكل مختلف عن الفترة المحددة سابقاً.

وفي كثير من الأحيان يتم تحويل البيانات الأسمية إلى بيانات كمية متقطعة ترتيبية وذلك فقط لكي يتم التعامل معها كمياً. فالحالة الاجتماعية والجنس تمثل بيانات اسمية يمكن الإشارة إليها كمياً لتصبح بيانات كمية متقطعة.

3-7 المتغيرات

يعرّف المتغير (Variable) بأنه مقدار له خصائص رقمية (كمية) وغير رقمية (وصفية) تتغير قيمته من عنصر إلى آخر من عناصر المجتمع أو العينة.

غالباً يستخدم مصطلح متغير للإشارة إلى البيان الإحصائي، حيث أن كلمة متغير تشير إلى وجود تغير للقيمة المحصلة من البيان وتعددها ما ينتج عنه وجود حاجة للتعامل كمياً أو وصفياً مع تلك القيم المختلفة.

فمثلا إذا رغبنا في دراسة ظاهرة مثل الطول أو الوزن أو لون البشرة أو الجنس فإن قراءة المفردات لمتغير الطول أو متغير اللون تكون بيانات كمية (رقمية) أما متغير الجنس ومتغير لون العين تأخذ قيماً وصفية (غير رقمية).

وفيما بعد سيتم استخدام كل من مصطلح متغير وصفي ومتغير كمي مستمر ومتغير كمي متقطع وبنفس التفصيل الوصفي المعمول به مع مصطلح البيان الإحصائي. وفي الواقع يعطى كلمة مصطلح متغير معنى أقوى من المعنى المحصل من كلمة بيان.

مثل المتغير الكمي المتصل أو المستمر، المتغير الأكثر استخداماً في العمليات الإحصائية، فمعظم المتغيرات التي يتم استخدامها في عملية الاستدلال الإحصائي تمثل متغيرات كمية مستمرة، خاصة في مجال الأموال والربح والخسارة والوقت المستغرق لوصول طلبيه معينة.

4- تنظيم البيانات الإحصائية

بعد جمع البيانات سواء من مصادر تاريخية أو من مصادر ميدانية، تأتي عملية تنظيم وتلخيص هذه البيانات، سواء كانت وصفية أو كمية، في جداول خاصة بصورة يسهل فهمها واستنتاج النتائج منها.

4-1 مخطط الساق و الأوراق

هناك طريقة مفيدة بدأت تستخدم مؤخراً تسمى مخطط الساق والأوراق (Steam and Leaf Plot)، وهذه الطريقة تعطي شكلاً مختصراً ومرتباً للمعلومات أو البيانات الكمية.

ولتوضيح هذه الطريقة، لنأخذ مجموعة من البيانات وهي تمثل درجات 20 طالباً في مقرر الرياضيات، علماً أن الدرجة العظمى هي 100 :

69	84	52	67	64	57	72	98	61	74
74	55	82	79	65	61	88	68	63	77

وإذا نظرنا إلى الرقم 61 مثلاً على أنه آحاد وعشرات فإنه يمكن أن يكتب على الشكل 1 | 6 ، فالعدد الذي على اليسار هو عشرات هذا الرقم، بينما العدد الذي على اليمين هو آحاده .

هذا يعني أنه يمكن كتابة الرقمين 61 و 69 **بالشكل** 9 1 | 6 أي وضعت العشرات لهذين الرقمين مشتركة بينما توزعت آحاده **لتدل على** الرقمين المختلفين.

وبالاعتماد على ما سبق يمكن تمثيل **مجموعة البيانات** السابقة اعتماداً على طريقة الساق والأوراق بالشكل التالي: **حيث الساق هنا ممثلاً** للعشرات بينما توزعت الأوراق لتدل على بقية أرقام الآحاد:

5	2	7	**5**					
6	9	7	**4**	**1**	5	1	8	3
7	2	4	**4**	**9**	**7**			
8	4	2	**8**					
9	8							

يمكن إعادة كتابة **البيانات أعلاه مرتبة بشكل تصاعدي** على الشكل التالي :

5	2	5	7					
6	1	1	3	**4**	**5**	7	**8**	**9**
7	2	4	4	**7**	9			
8	2	4	8					
9	8							

كما يمكن إعادة كتابتها **تنازلياً لو أردنا**.

ومن الجدير بالذكر أن طريقة عرض الساق والأوراق يمكن أن تطبق على بيانات تحتوي على أعشار وأجزاء المئة وهذا يحتاج لدقة أكثر ومجهود أكبر. فعلى سبيل المثال عرض الساق والأوراق لهذه المجموعة من البيانات

1.2 | 3 5 2 0 8

يمثل الأرقام التالية:

1.23 , 1.25 , 1.22 , 1.20 , 1.28

وكذلك:

0.3 | 17 03 55 89

يمثل الأرقام:

0.317, 0.303, 0.355. 0.389

وفي الواقع هناك عدة أشكال، لطريقة الساق والأوراق لعرض مجموعة من البيانات تتناسب والدقة المطلوبة وتناسب أيضاً الحاجة، فإذا أردنا عرض البيانات الواردة في المثال أعلاه بحيث يحتوي العرض على أكثر من ساق فيمكن في هذه الحالة أن نستخدم (*) من أجل 0,1,2,3,4 و (●) من أجل 9,8,7,6,5 بذلك يمكن أن نضاعف أعداد السيقان مرتين (أو أكثر إن لزم الأمر) وفي مثالنا يمكن الحصول على عرض الساق مضاعفاً والأوراق بالشكل التالي:

5*	2
5●	7 5
6*	1 3 4 1
6●	9 5 7 8
7*	4 2 4
7●	9 7
8*	4 2
8●	8
9●	8

4- 2 المخطط النقطي

يتميز المخطط النقطي (Dot diagramg) بوضع نقطة على محور الأعداد والذي يمثل بمجمله مجال كل الأعداد ونقوم بوضع نقطة على هذا المحور مقابلة لكل نقطة من هذه البيانات وفي النهاية تتجمع النقاط في مجال معين ما يعطينا فكرة عن الأكثرية أو الأقلية ضمن هذا المجال.

مثال (3):

تمثل البيانات التالية درجات الحرارة خلال أسبوع من شهر كانون الثاني. مثل البيانات التالية نقطياً : 3, 6, 4, -2, 7, 4, 3, -2

الحل:

لاحظ من المخطط النقطي تجمع النقط عند 4, 2 -, 3.

مثال (4):

البيان التالي:

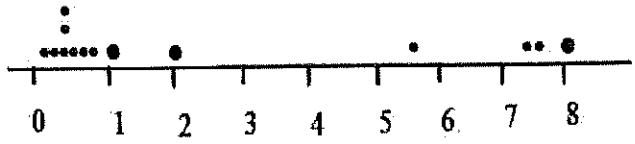
5.5	8.0	7.3	1.18	2.0	0.107	0.196
0.283	0.21	0.179	0.854	0.58	0.19	7.5

يحتوي على القيمة المطلقة للفرق بالغرامات بين الوزن المفترض 1كغ و وزن التعبئة الآلية لعينة مكونة من 14عبوة من السكر. اختيرت عشوائياً من إنتاج أحد المصانع، وتم وزنها بميزان حساس.

والمطلوب:

مثّل هذه البيانات بطريقة المخطط النقطي.

الحل:



لاحظ تمركز النقط في البداية مما يعني أن الفروق صغيرة على الأغلب.

3-4 الجداول التكرارية

تعد طريقة تنظيم البيانات في جداول تكرارية (Frequency Tables) من أهم الطرق المستخدمة في عرض البيانات، حيث يتم تلخيص البيانات إلى فئات، ولكل فئة تكرار تتحدد قيمته حسب البيانات. تسمى البيانات بعد تلخيصها في جداول تكرارية بالبيانات المبوبة. وعادة ما نلجأ لهذا الأسلوب إذا كان لدينا عدد كبير من البيانات.

يتكون الجدول التكراري من عمودين يمثل العمود الأول الفئة و يمثل العمود الثاني عدد البيانات التي تنتمي إلى كل فئة ويسمى هذا العدد بتكرار الفئة ويرمز له عادة بالرمز f .

يتم عادة استنتاج الجدول التكراري من جدول تفريغ البيانات الإحصائية، والذي يتكون من ثلاثة أعمدة:

- العمود الأول: يكتب فيه الصفة للبيانات الوصفية أو الفئة للبيانات الكمية.
- العمود الثاني: توضع فيه العلامات وهي عبارة عن حزم مكونة من خمسة خطوط، أربعة منها رأسية والخامس مائل يحزم الخطوط الرأسية.
- العمود الثالث: يكتب فيه مجموع العلامات لكل صفة أو فئة كل على حدة، ومجموع هذه العلامات في كل فئة يسمى بالتكرار لهذه الصفة أو الفئة.

لعرض البيانات بطريقة الجدول التكراري، نميز بين حالتين:

- الحالة الأولى: تنظيم جدول تكراري لبيانات وصفية
- الحالة الثانية: تنظيم جدول تكراري لبيانات كمية.

لتنظيم جدول تكراري لبيانات وصفية، فإننا نشكل جدول تفريغ البيانات الإحصائية، ثم نستنتج منه جدول التكرار.

مثال(5):

تمثل البيانات الوصفية التالية المبينة تقديرات 60 طالباً في إحدى المواد:

D	B	E	C	D	B	D	C	E	A
B	E	C	D	B	D	D	A	E	C
C	D	A	C	E	D	C	C	D	B
D	E	D	D	A	D	D	C	D	C
D	A	B	D	B	D	C	D	C	E
D	B	C	C	E	D	C	C	D	A

لتنظيم الجدول التكراري للبيانات الوصفية ، نشكل أولاً جدول تفريغ البيانات الإحصائية.

التقدير	العلامات	التكرار(عدد الطلاب)
A	~~IIII~~ I	6
B	~~IIII~~ III	8
C	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ I	16
D	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ I	22
E	~~IIII~~ III	8
المجموع		60

ثم نستفيد من جدول تفريغ البيانات الإحصائية لتكوين الجدول التكراري للبيانات الوصفية.

الفئات	التكرار (عدد الطلاب)
A	6
B	8
C	16
D	22
E	8
المجموع	60

لتنظيم جدول تكراري لبيانات كمية، فإننا نحتاج لعمل فئات أو فترات منتظمة (أي متساوية الطول) للبيانات كما يلي:

- يتم تحديد عدد الفئات و يعتمد إلى حد كبير على الخبرة و يفضل ألا تقل عن خمس ولا تزيد عن عشرين فئة. يجب ألا يكون عدد الفئات صغيراً جداً ما يؤدي إلى ضغط البيانات فتتلاشى الاختلافات بين الفئات المختلفة، وأيضاً يجب ألا يكون عدد الفئات كبيراً نسبياً حتى لا تضيع الفوارق بين الفئات وتفادياً لظهور فئات خالية. كما يتوجب مراعاة أن تغطي الفئات جميع البيانات بحيث لا تبقى أي مفردة بدون فئة. أفضل عدد للفئات من الناحية العملية هو ثمان فئات
- يتم تحديد مدى البيانات (Range) وهو الفرق بين أكبر قراءة وأصغر قراءة.
- يتم حساب طول الفئة (L)، وذلك بتقسيم المدى على عدد الفئات. ولتفادي العمل مع الكسور إن وجدت فإنه يمكن تقريب طول الفئة إلى أصغر عدد صحيح أكبر أو يساوي طول الفئة.
- يكوّن الجدول التفريغي، حيث يمثل العمود الأول في الجدول عمود الفئات، ونضع فيه حدود الفئات وهي مجالات مغلقة من اليسار ومفتوحة من اليمين ومكونة من حدين حد أدنى و حد أعلى. يتم اختيار أصغر قيمة للبيانات أو قيمة تقريبية لها لتكون الحد الأدنى للفئة الأولى و يضاف لها طول الفئة

فنحصل على الحد الأعلى للفئة الأولى و الذي بدوره الحد الأدنى للفئة الثانية وهكذا بالنسبة لباقي الفئات. لابد من ملاحظة أن الفئة الأولى تبدأ أو تشمل أصغر قيمة، والفئة الأخيرة لا بد أن تشمل أكبر قيمة.

- يستنتج جدول التكرار من جدول تفريغ البيانات.

مثال(6):

تمثل البيانات الكمية التالية المبينة في الشكل (5 – 2) درجات 50 طالباً في إحدى المواد:

51	95	70	74	73	90	71	74	90	67
91	72	83	89	50	80	72	84	85	69
62	82	87	76	91	76	87	75	78	79
71	96	81	88	64	82	73	57	86	70
80	81	75	85	74	90	83	66	77	91

الشكل (5 – 2) بيانات رقمية تمثل علامات 50 طالباً في إحدى المواد

لتنظيم جدول التكرار للبيانات الكمية الموضحة في الشكل (5 – 2) ، نقوم بما يلي:

1- نحسب المدى R كما يلي: $R = 97 - 50 = 47$.

2- نختار مثلاً عدد الفئات = 5 فئات.

3- نحسب طول الفئة بأن نقسم المدى على عدد الفئات بحيث يقرب الكسر إن وجد إلى أصغر عدد صحيح أكبر أو يساوي الناتج، وبذلك يكون طول الفئة L عدداً صحيحاً أي أن: $L = 47/5 = 9.4 \approx 10$

4- نختار أصغر قراءة في البيانات 50 لتكون بداية للفئة الأولى، يضاف إليها طول الفئة 10 فنحصل بذلك على بداية الفئة الثانية $50 + 10 = 60$. لإيجاد نهاية أي فئة نضيف إلى بدايتها طول الفئة، وفي هذا المثال تكون

نهاية الفئة الأولى هي 60 ونهاية الفئة الثانية 70 وهكذا بالنسبة لباقي الفئات.

ويكون جدول تفريغ البيانات كما هو موضح في الجدول التالي(5 – 2).

حدودالفئة	العلامات	التكرار(عدد الطلاب)
50-60	III	3
60-70	~~IIII~~	5
70-80	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ III	18
80-90	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ I	16
90-100	~~IIII~~ III	8
المجموع		50

الجدول(5 – 1) جدول تفريغ درجات 50 طالباً في إحدى المواد، للبيانات الكمية الموضحة في الشكل (5 – 2)

يستنتج من الجدول السابق جدول التوزيع التكراري للبيانات الإحصائية الكمية، والذي يتكون من عمودين: الأول يكتب فيه التكرار، والثاني يكتب فيه حدود الفئة، كما هو مبين في الجدول التالي (5 – 2) .

حدودالفئة	التكرار(عدد الطلاب)
50-60	3
60-70	5
70-80	18
80-90	16
90-100	8
المجموع	50

الجدول(5 – 2) التوزيع التكراري لدرجات 50 طالباً في إحدى المواد، للبيانات الموضحة في الشكل(5 – 2)

يمكن تكوين جدولين آخرين من جدول التوزيع التكراري، وهما:

- الجدول التكراري النسبي (Relative Frequency Table).

- الجدول التكراري المئوي (Percentage Frequency Table).

4–2 الجدول التكراري النسبي

يتكون الجدول التكراري النسبي من عمودين مثل الجدول التكراري العادي، ولكن عمود التكرار يكتب فيه التكرار النسبي.

التكرار النسبي هو عبارة عن التكرار لأي فئة مقسوماً على مجموع التكرارات. ويكون مجموع التكرار النسبي لجميع الفئات مساوياً للواحد الصحيح كما هو موضح في الجدول (5 – 3).

حدودالفئة	التكرارالنسبي
50-60	0.06
60-70	0.10
70-80	0.36
80-90	0.32
90-100	0.16
المجموع	1.00

الجدول (5 – 3) التوزيع التكراري النسبي لدرجات 50 طالباً، للبيانات الموضحة في الشكل (5 – 2)

4–3 الجدول التكراري المئوي

يتكون الجدول التكراري المئوي للبيانات الإحصائية من عمودين أيضاً مثل الجدول التكراري النسبي السابق، ولكن في عمود التكرارات النسبية تكتب التكرارات المئوية، والذي يمكن الحصول عليها بضرب التكرار النسبي بـ 100. ويلاحظ أن مجموع التكرارات المئوية يساوي 100. وعليه يكون الجدول (5–4) هو الجدول التكراري المئوي لدرجات 50 طالباً في إحدى المواد للبيانات الموضحة في الشكل (5 – 2).

حدودالفئة	التكرارالمئوي
50-60	6
60-70	10
70-80	36
80-90	32
90-100	16
المجموع	100

جدول (5 – 4) التوزيع التكراري المئوي لدرجات 50 طالباً للبيانات الموضحة في الشكل (5 – 2)

يعرّف مركز الفئة بالعلاقة التالية:

مركز الفئة = (الحد الأعلى+ الحد الأدنى) ÷2

وباستخدام نفس الطريقة يمكن حساب باقي مراكز الفئات الأخرى، أو يمكن إضافة طول الفئة إلى مركز الفئة الأولى لنحصل على مركز الفئة الثانية وهكذا بالنسبة لباقي الفئات.

يمكن تنظيم الجداول السابقة للبيانات الكمية في جدول واحد يشمل حدود الفئات ومراكز الفئات والتكرار والتكرار النسبي والتكرار المئوي.

وبالتالي يُكون جدول شامل لتوزيع درجات خمسين طالباً في إحدى المواد كما هو مبين في الجدول التالي (5 – 5).

حدودالفئة	مركز الفئة	التكرار	التكرارالنسبي	التكرارالمئوي
50-60	55	3	0.06	6
60-70	65	5	0.10	10
70-80	75	18	0.36	36
80-90	85	16	0.32	32
90-100	95	8	0.16	16
المجموع		50	1.00	100

الجدول (5 – 5) جدول شامل لتوزيع درجات 50 طالباً في إحدى المواد، للبيانات الموضحة في الشكل (5 – 2)

4-4 الجدول التكراري المتجمع الصاعد

يستخدم الجدول التكراري المتجمع الصاعد(Cumulative Frequency"Less Than") عندما يكون اهتمامنا منصباً على عدد البيانات التي تكون أصغر أو تساوي مقداراً معيناً. فمثلاً عدد الطلاب الحاصلين على الدرجة 80 أوأقل.

إن مجموع تكرارات القيم الأصغر من الحد الأعلى لفئة ما نسمية التكرار المتجمع الصاعد حتى تلك الفئة.

يتكون الجدول التكراري المتجمع الصاعد من عمودين:

- العمود الأول نكتب فيه الحد الأعلى لكل فئة.
- العمود الثاني نكتب فيه التكرار المتجمع الصاعد لكل فئة، أي من أجل كل حد أعلى لأي فئة، نوجد مجموع تكرارات القيم الأصغر منه.

يوضح ذلك في الجدول التالي (5 – 6) الذي يمثل التوزيع التكراري المتجمع الصاعد لدرجات الطلاب الموضحة في الشكل (5 – 2) ، حيث نلاحظ أنه يوجد ثلاث قيم أقل من 60، و $3 + 5 = 8$ قيمة أقل من 70، و $8 + 18 = 26$ قيمة أقل من 80، و $26 + 16 = 42$ قيمة أقل من 90، و $42 + 8 = 50$ قيمة أقل من 100.

التكرار المتجمع الصاعد	الحد الأعلى للفئة
3	<60
8	<70
26	<80
42	<90
50	<100

الجدول (5 – 6) التوزيع التكراري المتجمع الصاعد لدرجات 50 طالباً، للبيانات الموضحة في الشكل (5 – 2)

5-4 الجدول التكراري المتجمع الهابط (النازل)

يستخدم الجدول التكراري المتجمع الهابط (Cumulative Frequency "or More") عندما يكون اهتمامنا منصباً على عدد البيانات التي تكون أكبر أو تساوي مقداراً معيناً. فمثلاً عدد الطلاب الحاصلين على الدرجة 80 أوأكثر.

إن مجموع تكرارات القيم الأكبر من الحد الأدنى لفئة ما نسمية التكرار المتجمع الهابط.

يتكون الجدول التكراري المتجمع الهابط من عمودين:

- العمود الأول نكتب فيه الحد الأدنى لكل فئة.
- العمود الثاني نكتب فيه التكرار المتجمع الهابط لكل فئة، أي من أجل كل حد أدنى لأي فئة، نوجد مجموع تكرارات القيم الأكبر منه.

ويوضح ذلك الجدول التالي (5-7) الذي يمثل التوزيع التكراري المتجمع الهابط لدرجات 50 طالباً المبينة في الشكل (5-2).

الحد الأدنى للفئة	التكرار المتجمع الهابط
>50	50
>60	47
>70	42
>80	24
>90	8

الجدول (5-7) التوزيع التكراري المتجمع الهابط لدرجات 50 طالباً، للبيانات الموضحة في الشكل (5-2)

5- طرائق عرض البيانات الإحصائية بيانياً

إن عرض البيانات بيانياً قد يكون أوقع أثراً ، وأوضح دلالة، وسنعرض فيما يلي أهم أشكال التمثيل البياني.

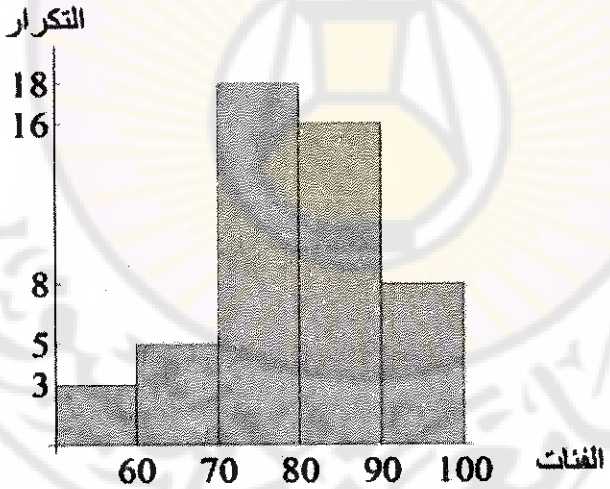
5-1 المدرج التكراري

يُسمى الرسم البياني للجدول التكراري بالمدرج التكراري (Frequency Histogram).

يُرسم المدرج التكراري على محورين متعامدين: المحور الأفقي ويمثل الفئات، والمحور الشاقولي ويمثل التكرار.

ثم يُرسم مستطيلات متلاصقة على الفئات، قاعدتها طول الفئة، وارتفاعاتها تكرارات هذه الفئات.

ويبين الشكل (5-3) المدرج التكراري للبيانات المختزلة في جدول التوزيع التكراري (5-2).



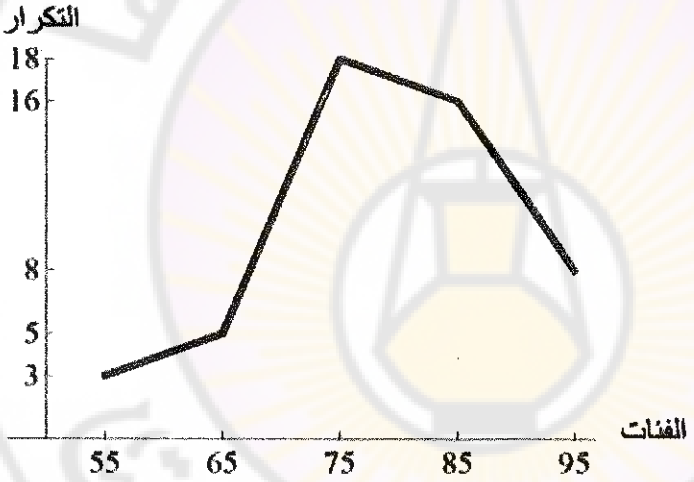
الشكل (5-3) المدرج التكراري لدرجات 50 طالباً في إحدى المواد و المبينة في الشكل (5-2)

5-2 المضلّع التكراري

يُرسم المضلع التكراري(Frequency Polygon) مثل المدرج التكراري على محورين: المحور لأفقي يمثل الفئات و المحور الشاقولي يمثل التكرار.

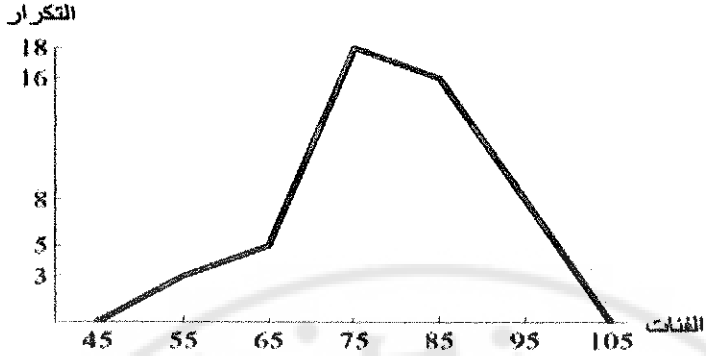
ولكن بدلاً من رسم مستطيل ارتفاعه يمثل التكرار، نضع نقطة واحدة فقط على ارتفاع يمثل التكرار لهذه الفئة عند منتصف الفئة، وهكذا نرسم بقية النقاط بحيث تكون ارتفاعاتها ممثلة لتكرار تلك الفئات، وذلك من منتصفاتها.

بعد ذلك نصل بخط مستقيم كل نقطتين متجاورتين فنحصل على المضلع التكراري كما هو موضح في الشكل (5-4) التالي للبيانات الموجودة في الجدول (5-2).



الشكل (5-4) المضلع التكراري للبيانات الموجودة في الجدول (5-2).

ولكي يكون المضلع صحيحاً يجب أن يكون مغلقاً. ويبين الشكل (5-5) المضلع التكراري المغلق للبيانات الموجودة في الجدول (5-2)، حيث وصلنا نهاية الطرف الأيسر للمضلع التكراري إلى منتصف الفئة التي تسبق الفئة الأولى، كما وصلنا نهاية الطرف الأيمن إلى منتصف الفئة التي تلي الفئة الأخيرة.



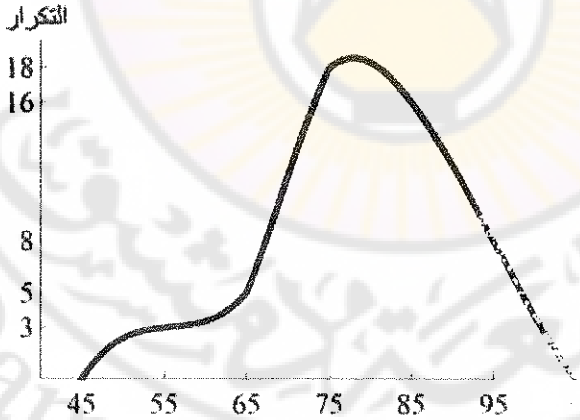
الشكل (5-5) المضلع التكراري المغلق للبيانات الموجودة في الجدول (5-2)

5-3 المنحني التكراري الانسيابي

يُرسم المنحني التكراري الانسيابي (Smoothed Frequency) على محورين متعامدين: الأفقي يمثل الفئات، والشاقولي يمثل التكرار.

ويتم رسم النقاط مثل ما اتبع في المضلع التكراري ويمهد المنحني التكراري باليد كي يأخذ شكلاً انسيابياً حتى لو لزم عدم المرور ببعض النقاط.

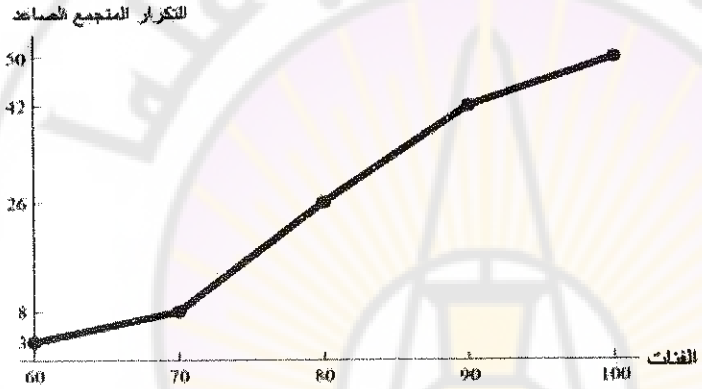
والشكل (5-6) التالي يبين المنحني التكراري الانسيابي للبيانات في الجدول (5-2).



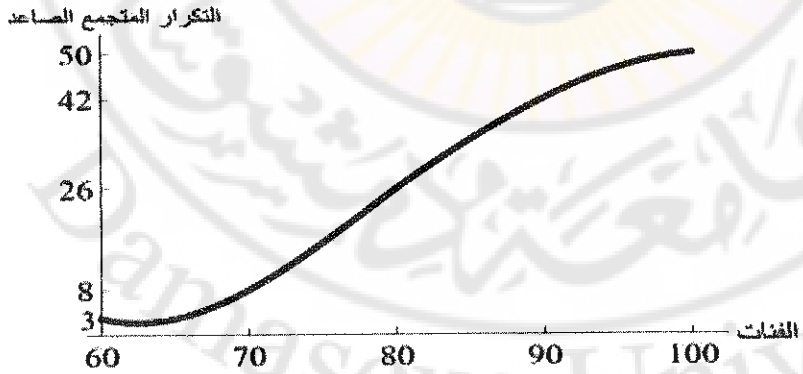
الشكل (5-6)المنحني التكراري الانسيابي للبيانات الموجودة في الجدول (5-2)

5-4 المضلع التكراري المتجمع الصاعد والمنحني التكراري المتجمع الصاعد

يُرسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد على محورين متعامدين: الأفقي يمثل الفئات، والشاقولي يمثل التكرارات المتجمعة الصاعدة، وتوضع النقاط في الرسم أعلى الحدود العليا للفئات بحيث يكون الارتفاع ممثلاً للتكرار المتجمع الصاعد. ويبين الشكل التالي (5-7) المضلع التكراري المتجمع الصاعد للبيانات في الجدول (5-6). وإذا مهدنا المضلع التكراري المتجمع الصاعد ليأخذ شكلاً انسيابياً، نحصل على المنحني التكراري المتجمع الصاعد الشكل (5-8).



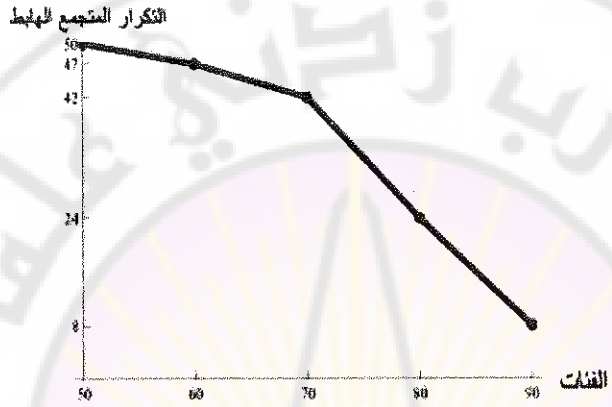
الشكل (5-7) المضلع التكراري المتجمع الصاعد للبيانات في الجدول (5-6)



الشكل (5-8) المنحني التكراري المتجمع الصاعد للمضلع التكراري المتجمع الصاعد في الشكل (5-7)

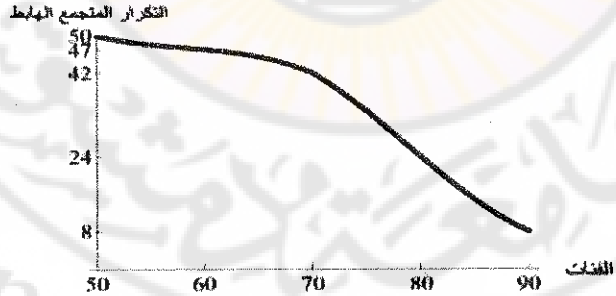
5- 5 المضلع التكراري المتجمع الهابط والمنحني التكراري المتجمع الهابط

يُرسم المضلع التكراري المتجمع الهابط على محورين متعامدين مثل المضلع التكراري الصاعد: الأفقي يمثل الحدود الدنيا للفئات و الشاقولي يمثل التكرارات المتجمعة الهابطة. ويبين الشكل التالي (5–9) المضلع التكراري المتجمع الهابط للبيانات في الجدول (5–6).



الشكل (5–9) المضلع التكراري المتجمع الهابط للبيانات في الجدول (5–6)

وإذا مهدنا المضلع التكراري المتجمع الهابط ليأخذ شكلاً انسيابياً، نحصل على المنحني التكراري المتجمع الهابط الشكل (5–10).



الشكل (5–10) المنحني التكراري المتجمع الهابط للبيانات في للمضلع التكراري المتجمع الهابط في الشكل (5–9)

6- المقاييس العددية الوصفية لبيان إحصائي

على الرغم من أن العرض البياني للبيانات الإحصائية أداة ذات قيمة بالغة لأنها تنقل وصفاً عاماً و سريعاً لتلك المعلومات، إلا أن هناك حدوداً لاستخدام الطرق البيانية تجعلنا نبحث عن معايير عددية لوصف البيانات الإحصائية، تبين الميزات المهمة لها و تميزها عن بعضها.

يمكن تقسيم المعايير العددية إلى نوعين رئيسيين هما:

- مقاييس النزعة المركزية (Measures of Central Tendency)
- مقاييس التشتت (Measures of Dispersion).

7- مقاييس النزعة المركزية

إن مقاييس النزعة المركزية هي مقاييس عددية تعكس رغبة البيانات في التمركز حول قيمة حسابية. و تتمركز مقاييس النزعة المركزية عموماً في وسط البيانات لتعطي فكرة عن مركز ثقل البيانات على وجه العموم. و يمتاز مقياس نزعة مركزية عن آخر بمدى صدق هذا المقياس وقدرته في تلخيص أكبر قدر ممكن من المعلومات التي تحتويها البيانات، والتي تعكس بدورها التغير في الظاهرة المدروسة.

والهدف من مقاييس النزعة المركزية تلخيص المعلومات التي تحتويها البيانات في مقياس رقمي يعبر عن التغير في الظاهرة المدروسة تعبيراً جيداً، و نستغني به عن البيانات الأساسية.

إن مقاييس النزعة المركزية مهمة في حالة المقارنة بين التوزيعات المختلفة بوجه عام. وتكون فائدتها أكثر في حالة التوزيعات المتشابهة في طبيعتها وأشكالها ولكنها مختلفة في موقعها. فمثلاً، لدراسة عينة من البيانات الإحصائية التي تخص بعض الأسر من الريف والمدينة، حسب فئات الإنفاق الاستهلاكي السنوي، فإن حساب المتوسط السنوي للإنفاق لكل من الريف والمدينة يمكننا من المقارنة بينهما.

وأهم مقاييس النزعة المركزية: المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.

1-7 المتوسط الحسابي

يُعدّ المتوسط الحسابي (Arithmetic Average or Mean) من أهم مقاييس النزعة المركزية، والأكثر استخداماً في الإحصاء والحياة العملية. إذ يستخدم عادة في الكثير من المقارنات بين الظواهر المختلفة. ويعرّف المتوسط الحسابي كما يلي:

إذا كانت مجموعة القيم للمتغير الكمي X هي $x_1, x_2, \dots, x_n$ فإن المتوسط الحسابي يساوي حاصل جمع القيم مقسوماً على عددها ويرمز له بالرمز $\bar{x}$ وعليه فإن:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

نرمز لمتوسط العينة بالرمز $\bar{x}$، و لمتوسط المجتمع بالرمز μ .

مثال (7):

لدينا درجات 5 طلاب في إحدى المواد كما يلي: 60, 72, 40, 80, 63، احسب المتوسط الحسابي لدرجات الطلاب.

الحل:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$$

$$\bar{x} = \frac{60 + 72 + 40 + 80 + 63}{5} = \frac{315}{5} = 63$$

إذا كان لدينا عدد k من الفئات ذات المراكز $x_1, x_2, \dots, x_k$، ولها تكرارات $f_1, f_2, \dots, f_k$ على الترتيب، فإن المتوسط الحسابي لها يعطى بالعلاقة التالية:

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_kx_k}{f_1 + f_2 + \cdots + f_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i$$

حيث $n = \sum_{i=1}^{k} f_i$.

مثال(8):

احسب متوسط أعمار الطلاب للبيانات التالية:

فئات العمر	5−7	7−9	9−11	11−13	13−15
التكرار	2	5	8	4	1

الحل:

للسهولة ننشئ الجدول التالي:

حدودالفئة	مركز الفئة x	التكرار f	x f
5-7	6	2	12
7-9	8	5	40
9-11	10	8	80
11-13	12	4	48
13-15	14	1	14
المجموع		**20**	**194**

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i = \frac{1}{20}(194) = 9.7$$

مثال(9):

احسب متوسط درجات الطلاب للبيانات المثال (6)

الحل:

للسهولة ننشئ الجدول التالي:

حدودالفئة	مركز الفئةx	التكرار	x f
50-60	55	3	165
60-70	65	5	325
70-80	75	18	1350
80-90	85	16	1360
90-100	95	8	760
المجموع		**50**	**3960**

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i = \frac{1}{50}(3960) = 79.2$$

ملاحظة:

يتمتع رمز المجموع Σ بالخاصتين التاليتين:

$$\sum_{i=1}^{n} ax_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i \quad -1$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \quad -2$$

والخاصة (2) يمكن تعميمها لحالة ثلاثة مجاميع فيكون:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i + z_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} z_i$$

بعض خصائص المتوسط الحسابي:

الخاصة الأولى:

مجموع انحرافات القيم عن المتوسط الحسابي يساوي صفراً، حيث إن الانحراف هو مقدار الفرق بين أية قيمة من مجموعة البيانات و المتوسط الحسابي. أي إذا

كان للمتغير X القيم $x_1, x_2, \dots, x_n$ وانحرافاتها عن المتوسط الحسابي هي $d_1, d_2, \dots, d_n$ ، حيث:

$$d_i = x_i - \bar{x} \quad , \quad i = 1,2, \dots n$$

فإن:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} d_i = 0$$

مثال (10):

لتكن مجموعة البيانات التالية: 1, 3, 5, 2, 4 ، تحقق من أن مجموع انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي يساوي الصفر.

الحل:

نوجد المتوسط الحسابي:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$$

$$\bar{x} = \frac{1 + 3 + 5 + 2 + 4}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x}) = (1 - 3) + (3 - 3) + (5 - 3) + (2 - 3)$$

$$= -2 + 0 + 2 - 1 + 1 = 0$$

و بالتالي نجد أن مجموع انحرافات القيم عن المتوسط الحسابي يساوي الصفر.

الخاصة الثانية:

إذا كان للمتغير X القيم $x_1, x_2, \dots, x_n$ ، وأضفنا أو طرحنا من قيم المتغير X مقداراً ثابتاً b، فإن المتوسط الحسابي للقيم الناتجة $y_1, y_2, \dots, y_n$ حيث $y_i = x_i \mp b$ يُعطى على الشكل التالي: $\bar{y} = \bar{x} \mp b$.

البرهان:

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i \mp b) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \mp \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b$$

$$\bar{y} = \bar{x} \mp \frac{1}{n}(nb) = \bar{x} \mp b$$

نقوم بهذا الإجراء عادة لتسهيل الحسابات كأن نطرح مقدار ثابت من كل منها نتخلص بموجبه من الأعداد الكبيرة أو من أجزاء عشرية و هكذا.

مثال (11):

في المثال (7) الوارد في فقرة المتوسط الحسابي إذا طرحنا المقدار $b = 50$ درجة من كل قياس (درجة) فإن المتوسط الحسابي للقياسات الناتجة:

$$\bar{y} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} y_i = \frac{1}{5}[(60-50)+(72-50)+(40-50)$$
$$+(80-50)+(63-50)]$$
$$= \frac{1}{5}(10+22-10+30+13)$$
$$= \frac{1}{5}(65) = 13$$

ومنه:

$$\bar{x} = \bar{y} + 50 = 13 + 50 = 36$$

وهي نفس قيمة المتوسط الحسابي التي حصلنا عليها في المثال (7).

الخاصة الثالثة:

إذا كان للمتغير X القيم $x_1, x_2, \dots, x_n$ وضربنا هذه القيم بمقدار ثابت حقيقي a، فإن متوسط القيم الجديدة يساوي المتوسط $\bar{x}$ مضروباً بـ a ، أي أن:

$$\overline{ax} = a\,\bar{x}$$

ومن الخاصتين الثانية والثالثة ينتج أن:

$$\overline{ax \mp b} = a\,\bar{x} \mp b$$

الخاصة الرابعة:

إذا كان للمتغير X القيم $x_1, x_2, \dots, x_n$ فإن مجموع مربعات انحرافات القيم عن أي قيمة حقيقية c، يكون أكبر أو يساوي مجموع مربعات انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي، أي أن:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)^2 > \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \quad , \bar{x} \neq c$$

ملاحظة

يُعدّ المتوسط الحسابي مقياساً سهل الحساب يخضع للعمليات الجبرية، و يأخذ بعين الاعتبار جميع القيم محل الدراسة، و يعد من أكثر المقاييس فهماً في الإحصاء.

ملاحظة

يتأثر المتوسط الحسابي بوجود قيم متطرفة بين مجموعة البيانات، والقيم المتطرفة هي القيم الكبيرة جداً مقارنة ببقية القيم و تتسبب في إعطاء مقاييس مضللة لا تُعبّر عن حقيقة المجتمع المدروس، و بالتالي تُضلل عملية اتخاذ القرار.

مثال (12):

لتكن مجموعة البيانات التالية: 4, 2, 1, 3, 20 ، أوجد المتوسط الحسابي؟

الحل:

بالنظر في هذه البيانات نجد أن القيمة المتطرفة مقارنة ببقية القيم هي القيمة 20، نوجد المتوسط الحسابي:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$$

$$\bar{x} = \frac{4 + 2 + 1 + 3 + 20}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

وبالتالي نجد أن قيمة المتوسط الحسابي قد ارتفعت بسبب وجود القيمة المتطرفة 20.

2-7 المتوسط المهذب

إذا اتضح من الفحص المبدئي للبيانات وجود قيم متطرفة بين البيانات فمن الأفضل عدم استخدام المتوسط الحسابي كمقياس للنزعة المركزية، ويجب استبعاد القيم المتطرفة من البيانات، وحساب متوسط جديد يعتمد على البقية المتجانسة من القيم، ويُسمى هذا المتوسط: المتوسط المهذب وهو المتوسط الحسابي لبقية البيانات بعد استبعاد القيم الشاذة، حيث يستبعد في معظم الأحيان القيم في بداية البيانات ونهايتهالضمان شروط التجانس.

لإيجاد المتوسط المهذب لمجموعة من البيانات، يتم اتباع الخطوات التالية:

- ترتب البيانات تصاعدياً
- تحديد نسبة التهذيب f وهي القيمة التي تحدد نسبة البيانات التي يجب استبعادها من طرفي البيانات
- حساب عدد القيم المراد استبعادها من العلاقة:

  عدد القيم المستبعدة = عدد البيانات × نسبة التهذيب

  ويتم تقريب الناتج إلى أقرب عدد صحيح، في حال كون الناتج كسراً.
- يتم حساب المتوسط للبيانات التي لم يتم استبعادها.

مثال (13):

لتكن مجموعة البيانات التالية:

$$95, 94, 81, 160, 135, 106, 114, 113, 110, 102, 97, 95$$

والمطلوب حساب المتوسط المهذب في الحالات التالية:

1- نسبة التهذيب 0%

2- نسبة التهذيب 8%

3- نسبة التهذيب 48%

4- نسبة التهذيب 42%

الحل:

يتم أولاً ترتيب البيانات تصاعدياً:

$$81, 94, 95, 95, 97, 102, 106, 110, 113, 114, 135, 160$$

1- بما أن نسبة التهذيب 0% فهذا يعني أنه لا توجد أية قيمة مستبعدة، وبالتالي:

يتم حساب المتوسط الحسابي لجميع للبيانات. ومنه:

$$\bar{x} = 108.5$$

2- بما أن نسبة التهذيب 8% ، فإن عدد القيم المستبعدة من كل طرف :

$$\frac{8 \times 12}{100} = 0.96 \approx 1$$

وبالتالي يتم استبعاد قيمة واحدة من البيانات من كل طرف، أي أنه يتم حساب المتوسط الحسابي للقيم العشر المتبقية التالية:

$$94, 95, 95, 97, 102, 106, 110, 113, 114, 135$$

ومنه المتوسط الحسابي لهذه القيم هو 106.1 و هو قيمة المتوسط المهذب للبيانات.

3- بما أن نسبة التهذيب 25% ، فإن عدد القيم المستبعدة من كل طرف :

$$\frac{25 \times 12}{100} = 3$$

وبالتالي يتم استبعاد ثلاث قيم من البيانات من كل طرف، أي أنه يتم حساب المتوسط الحسابي للقيم الست المتبقية التالية:

$$95, 97, 102, 106, 110, 113$$

ومنه المتوسط الحسابي لهذه القيم هو 103.833 و هو قيمة المتوسط المهذب للبيانات.

4- بما أن نسبة التهذيب 42% ، فإن عدد القيم المستبعدة من كل طرف :

$$\frac{42 \times 12}{100} = 5.04 \approx 5$$

وبالتالي يتم استبعاد خمس قيم من البيانات من كل طرف، أي أنه يتم حساب المتوسط الحسابي للقيمتين المتبقيتين التاليتين: 102, 106

ومنه المتوسط الحسابي لهاتين القيمتين هو 104 وهو قيمة المتوسط المهذب للبيانات.

3-7 الوسيط

يعرّف الوسيط (Median) بأنه القيمة التي تقع في المنتصف عند ترتيب البيانات (المشاهدات) ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً. نرمز للوسيط بالرمز $\tilde{x}$ أو Med. فإذا كان عدد البيانات فردياً فإن الوسيط هو القيمة التي تقع في المنتصف، أما إذا كان عدد البيانات زوجياً فإن الوسيط هو متوسط القيمتين اللتين تقعان في المنتصف.

مثال (14):

أوجد الوسيط لدرجات الطلاب التالية:

$$72, 40, 80, 63, 60$$

الحل:

لإيجاد الوسيط ترتب البيانات ترتيباً تصاعدياً كالتالي:

$$40 , 60 , 63 , 72 , 80$$

وبما إن عدد البيانات فردي، فإن الوسيط هو المتوسط الحسابي للقيمتين 63 و 72 اللتين تقعان في منتصف البيانات، أي:

$$\text{Med} = (63 + 72)/2 = 67.5$$

مثال (15):

أوجد الوسيط لدرجات الطلاب التالية:

$$72, 40, 80, 63, 60, 72$$

الحل:

لإيجاد الوسيط ترتب البيانات ترتيباً تصاعدياً كالتالي:

$$40 , 60 , 63 , 72 , 72 , 80$$

وبما إن عدد البيانات زوجي، فإن الوسيط هو المتوسط الحسابي للقيمتين 63 و 72 اللتين تقعان في منتصف البيانات أي:

$$\text{Med} = (63 + 72)/2 = 67.5$$

ولحساب الوسيط في حالة البيانات المبوبة (الجداول التكرارية):

1- نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد للبيانات.

2- نوجد المجموع الكلي للتكرارات و سنرمز له n، و يمكن استنتاجه من جدول التكرار المتجمع الصاعد حيث يمثل التكرار المتجمع الصاعد المقابل للحد الأعلى للفئة الأخيرة.

ويدعى $r = \frac{n}{2}$ رتبة (موقع) الوسيط.

3- نحدد فئة الوسيط وهي الفئة التي يقع فيها الوسيط و ذلك بالبحث عن القيمة r في عمود التكرار المتجمع الصاعد، عندئذ يكون الحد الأدنى لفئة الوسيط هو القيمة الموجودة في عمود الحد الأعلى والمقابلة للتكرار المتجمع الصاعد الذي يسبق r و يكون الحد الأعلى لفئة الوسيط هو القيمة الموجودة في عمود الحد الأعلى و المقابلة للتكرار المتجمع الصاعد الذي يلي r .

4- نحدد الوسيط من العلاقة:

$$\text{Med} = A + \frac{(\frac{n}{2} - F_1)}{F_2 - F_1} L$$

حيث:

A : تمثل الحد الأدنى لفئة الوسيط.

L : تمثل طول فئة الوسيط وهو ناتج طرح الحد الأعلى لفئة الوسيط من الحد الأدنى لفئة الوسيط.

F_1 : تمثل التكرار المتجمع الصاعد الذي يسبق r.

F_2 : تمثل التكرار المتجمع الصاعد الذي يلي r.

n : مجموع التكرارات.

مثال (16):

أوجد الوسيط للبيانات الموضحة في المثال (8)

الحل:

لحساب الوسيط ننشئ جدول التكرار المتجمع الصاعد كما يلي:

التكرار المتجمع الصاعد	الحد الأعلى للفئة
2	<7
7	<9
15	<11
19	<13
20	<15

ثم نحدد رتبة (موقع) الوسيط :

$$\frac{n}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

ونلاحظ أن 10 تقع بين 7 و 15 وبالتالي فإن فئة الوسيط هي $(11 - 9)$، ومنه الحد الأدنى لفئة الوسيط (9) و طول فئة الوسيط (2) والتكرار المتجمع الصاعد الذي يسبق 10 (7)، و التكرار المتجمع الصاعد الذي يلي 10 (15)، أي:

$$A = 9, \qquad F_1 = 7, \qquad F_2 = 15, \qquad L = 11 - 9 = 2$$

وبتطبيق قانون الوسيط الحسابي نحصل على الوسيط الحسابي:

$$\tilde{x} = \text{Med} = 9 + \frac{(10-7)}{15-7} \times 2 = 9.75$$

مثال (17):

أوجد الوسيط للبيانات الموضحة في الجدول(5–2)

الحل:

لحساب الوسيط ننشئ جدول التكرار المتجمع الصاعد للبيانات و الموضح سابقاً في الجدول (5–6). ثم نحدد رتبة (موقع) الوسيط:

$$\frac{n}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

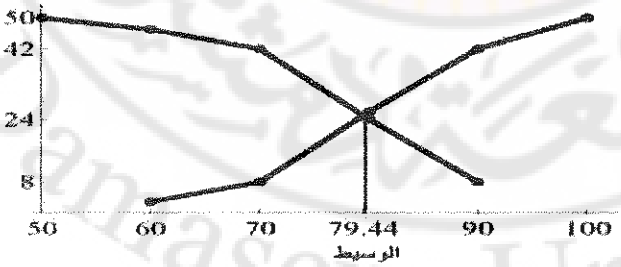
نلاحظ أن 25 تقع بين 8 و 26 وبالتالي فإن فئة الوسيط هي $(70-80)$، ومنه الحد الأدنى لفئة الوسيط (70) و طول فئة الوسيط (10) والتكرار المتجمع الصاعد الذي يسبق 25 (8)، والتكرار المتجمع الصاعد الذي يلي 25 (26)، أي:

$$A = 70, \qquad F_1 = 8, \qquad F_2 = 26, \qquad L = 80 - 70 = 10$$

وبتطبيق قانون الوسيط نحصل على الوسيط:

$$\tilde{x} = \text{Med} = 70 + \frac{(25-8)}{26-8} \times 10 = 79.44$$

يمكن تحديد الوسيط بيانياً بنقطة تقاطع كل من المضلع التكراري المتجمع الصاعد والمضلع التكراري المتجمع الهابط. كما هو مبين في الشكل (5–11).



الشكل (5–11) تحديد الوسيط بيانياً

ملاحظة

من ميزات الوسيط أنه لا يتأثر بالقيم المتطرفة للبيانات. ومن عيوبه أنه لا يأخذ جميع القيم في الحسبان عند حسابه إذ إنه يعتمد فقط على القيم التي في المنتصف وعلى ترتيب البيانات بغض النظر عن قيمها. كما إنه يمكن إيجاده في حالة البيانات الوصفية.

4-7 المنوال

يعرّف المنوال (Mode) بأنه القيمة الأكثر تكراراً في مجموعة البيانات أو المشاهدات. وقد يكون لمجموعة من البيانات منوال واحد، أو يكون لها أكثر من منوال، كما يمكن أن لا يكون لمجموعة البيانات أي منوال.

مثال (18) :

أوجد المنوال لمجموعة البيانات التالية:

$$2, 6, 9, 4, 6, 10, 6$$

الحل:

المنوال هو: القيمة 6.

مثال (19):

أوجد المنوال لمجموعة البيانات التالية:

$$4, 3, 7, 4, 7, 7, 10, 4, 6$$

الحل:

نلاحظ من خلال هذه البيانات أن القيمة 4 تكررت ثلاث مرات والقيمة 7 تكررت ثلاث مرات، وعليه فإنه يوجد منوالان هما 4 و 7.

وفي حالة البيانات المبوبة، يحسب المنوال من القانون التالي:

$$\text{Mod} = A + \frac{(F - F_1)}{2F - F_1 - F_2} L$$

حيث:

F: تمثل أكبر تكرار وعليه يمكن إيجاد التكرار السابق له F_1 والتكرار التالي له F_2.

A: تمثل الحد الأدنى لفئة المنوال وهي الفئة التي يقابلها أعلى تكرار F

L: تمثل طول فئة النوال وتساوي الفرق بين الحد الأعلى و الحد الأدنى للفئة.

مثال(20):

أوجد المنوال للبيانات الموضحة في المثال (8).

الحل:

من الجدول نجد أن الفئة الأكثر تكراراً هي الفئة $11 - 9$ وهي فئة المنوال، والحد الأدنى لفئة المنوال (9) وطول هذه الفئة (2)، كما أن تكرار الفئة السابقة لفئة المنوال (5)، وتكرار الفئة التالية لفئة المنوال (4).

ومنه :

$$A = 9, F = 8, F_1 = 5, F_2 = 4, \quad L = 11 - 9 = 2$$

وبتطبيق قانون المنوال نحصل على ينتج:

$$\text{Mod} = 9 + \frac{8 - 5}{16 - 5 - 4} \times 2$$
$$= 9.857$$

مثال (21):

أوجد المنوال للبيانات الموضحة في جدول التوزيع التكراري (5-2)

الحل:

من الجدول نجد أن الفئة الأكثر تكراراً هي الفئة $80 - 70$ فهي فئة المنوال، والحد الأدنى لفئة المنوال (70)، وطول هذه الفئة (10)، كما أن تكرار الفئة السابقة لفئة المنوال (5)، وتكرار الفئة التالية لفئة المنوال (16).

ومنه :

$A = 70, \quad F = 18, \quad F_1 = 5, \quad F_2 = 16, \quad L = 80 - 70 = 10$

وبتطبيق قانون المنوال نحصل على ينتج:

$$Mod = 70 + \frac{18 - 5}{2(18) - 5 - 16} \times 10 = 78.667$$

ملاحظة

من ميزات المنوال أنه لا يتأثر بالقيم المتطرفة للبيانات، ويمكن إيجاده من أجل البيانات الوصفية. ومن عيوبه أنه لا يأخذ جميع القيم في الحسبان عند حسابه.

5-7 المتوسط الهندسي

يعطى المتوسط الهندسي $G.M$ لمجموعة من البيانات $x_1, x_2, \dots, x_n$ عددها n بالعلاقة التالية:

$$G.M = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

مثال (22):

أوجد المتوسط الهندسي للبيانات التالية:

$$3, 5, 6, 6, 7, 10, 12$$

الحل:

$$G.M = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

$$G.M = \sqrt[7]{3 \times 5 \times 6 \times 6 \times 7 \times 10 \times 12}$$

$$G.M = 6.43$$

في حالة البيانات المبوبة فإن المتوسط الهندسي للفئات، التي عددها k، ومراكزها $x_1, x_2, \dots, x_k$، ويقابلها تكرارات $f_1, f_2, \dots, f_K$ على الترتيب، يعطى بالعلاقة:

$$G.M = \sqrt[n]{x_1^{f_1}\, x_2^{f_2} \dots x_k^{f_k}}$$

حيث: $n = \sum_{i=1}^{k} f_i$.

6-7 المتوسط التوافقي

يُرمز للمتوسط التوافقي بالرمز H ويستخدم عندما يكون مقلوب المتغير له دلالة، كأن يعين نسبة بين متغيرين مرتبطين مثل السرعة بالنسبة للزمن.

والمتوسط التوافقي H لمجموعة من القيم $x_1, x_2, \dots, x_n$ هو مقلوب المتوسط الحسابي لمقلوبات هذه القيم.

أي أن:

$$H = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$$

ومن الناحية العملية يكون لدينا:

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$$

مثال (23):

احسب المتوسط التوافقي للبيانات في المثال (22)

الحل:

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$$
$$= \frac{1}{7}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}\right)$$
$$= \frac{501}{2940}$$

ومنه:

$$H = 5.87$$

يتضح من المثال السابق أن :

المتوسط التوافقي > المتوسط الهندسي > المتوسط الحسابي

وذلك لنفس البيانات.

في حالة البيانات المجمعة فإن المتوسط التوافقي للفئات والتي عددها k ومراكزها $x_1, x_2, \dots, x_k$، ويقابلها تكرارات $f_1, f_2, \dots, f_k$ على الترتيب، يعطى بالعلاقة:

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i}{x_i} = \frac{1}{n}\left(\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \cdots + \frac{f_k}{x_k}\right)$$

حيث: $n = \sum_{i=1}^{k} f_i$.

7-7 الربيعات والعشيرات والمئينات

إذا رتبت عينة عشوائية حسب قيمتها تصاعدياً أو تنازلياً، فإن القيمة الواقعة في المنتصف والتي تقسم العينة إلى مجموعتين متساويتين في العدد هي الوسيط كما سبق تعريفه.

وبتعميم الفكرة، وتقسيم البيانات، بعد ترتيبها إلى أربعة أجزاء متساوية، يرمز لها بـ:

$$Q_1, Q_2, Q_3$$

حيث إن:

Q_1: يمثل الرّبيع الأول وهو القيمة التي يسبقها 25% من البيانات.

Q_2: يمثل الرّبيع الثاني (الوسيط)، وهو القيمة التي يسبقها 50% من البيانات.

Q_3: يمثل الرّبيع الثالث، وهو القيمة التي يسبقها 75% من البيانات .

وكذلك يمكن إيجاد القيم التي تقسم البيانات السابقة بعد ترتيبها إلى عشرة أقسام و يرمز لها بـ:

$$D_1, D_2, \dots, D_9$$

حيث إن:

D_1: يمثل العشير الأول، وهو يمثل القيمة التي يسبقها 10% من البيانات.

D_2: يمثل العشير الثاني، وهو يمثل القيمة التي يسبقها 20% من البيانات.

D_3: يمثل العشير الثالث، وهو يمثل القيمة التي يسبقها 30% من البيانات.

وهكذا.... حتى

D_9: يمثل العشير التاسع، وهو يمثل القيمة التي يسبقها 90% من البيانات.

وكذلك يمكن إيجاد القيم التي تقسم البيانات السابقة بعد ترتيبها إلى مئة قسم، ويرمز لها بـ:

$$P_1, P_2, \dots, P_{99}$$

حيث إن:

P_1: يمثل المئين الأول، وهو يمثل القيمة التي يسبقها 1% من البيانات.

P_2: يمثل المئين الثاني، وهو يمثل القيمة التي يسبقها 2% من البيانات .

P_3: يمثل المئين الثالث، وهو يمثل القيمة التي يسبقها 3% من البيانات .

وهكذا.... حتى

P_{99}: يمثل المئين التاسع و التسعون، وهو يمثل القيمة التي يسبقها 99% من البيانات

لإيجاد الربيعات والعشيرات والمئينات كما يلي:

- نرتب البيانات ترتيباً تصاعدياً
- نحسب الرتبة (الموقع) L للربيع أو العشير أو المئيني المطلوب بين البيانات المرتبة، و ذلك بأن نضرب العدد الكلي للقيم بالنسبة المئوية للربيع أو العشير أو المئيني المطلوب. فمثلاً:

– لتحديد رتبة (موقع) الربيع الأول فإننا نضرب العدد الكلي للبيانات بـ $\frac{25}{100}$

– لتحديد رتبة (موقع المئين) الثالث فإننا نضرب العدد الكلي للبيانات بـ $\frac{3}{100}$

- ونميز حالتين لـ L كما يلي:

- إذا كان لـ L قيمة صحيحة، عندئذ نحصل على قيمة الربيع أو العشير أو المئيني المطلوب بجمع القيمة التي رتبتها (موقعها) L و القيمة التي تليها و تقسيم الناتج على 2.
- إذا كان لـ L قيمة كسرية، فإننا نقرب L لأقرب قيمة صحيحة أكبر منها، عندئذ قيمة الربيع أو العشير أو المئيني المطلوب هي القيمة التي رتبتها (موقعها) L.

مثال (24):

أوجد الربيع الأول و الثالث للبيانات التالية:

$$59, 67, 65, 69, 58, 55, 70, 72, 74$$

الحل

1- نرتب البيانات تصاعدياً على الشكل التالي:

$$55, 58, 59, 65, 67, 69, 70, 72, 74$$

2- نوجد قيمة Q_1 كما يلي، نوجد رتبة (موقع) الربيع الأول من بين القيم وذلك بأن نضرب عدد البيانات بالنسبة المئوية للربيع الأول $9 \times \frac{25}{100} = 2.25$، و بما أن الناتج قيمة ليست صحيحة فإننا نقرب الناتج إلى أكبر قيمة صحيحة أكبر منها، و منه $2.25 \approx 3$ و بالتالي القيمة التي ترتيبها الثالث (من اليسار) هي قيمة الربيع الأول

$$Q_1 = 59$$

3- نوجد قيمة Q_3 كما يلي، ، نوجد رتبة (موقع) الربيع الثالث من بين القيم وذلك بأن نضرب عدد البيانات بالنسبة المئوية للربيع الثالث $9 \times \frac{75}{100} = 6.75$، و بما أن الناتج قيمة ليست صحيحة فإننا نقرب الناتج إلى أكبر قيمة صحيحة أكبر منها، و منه $6.75 \approx 7$ و بالتالي القيمة التي ترتيبها السابع هي قيمة الربيع الثالث

$$Q_3 = 70$$

ويُعطى قانون حساب الربيعات والعشيرات والمئينات في حالة البيانات المبوبة مثل قانون الوسيط السابق وهو:

$$Med = A + \frac{(\frac{n}{2} - F_1)}{F_2 - F_1} L$$

مع استبدال $\frac{n}{2}$ بـ $\frac{n}{4}$ للربيع الأول، و $\frac{2n}{4}$ للربيع الثاني... وهكذا.

كذلك استبدال $\frac{n}{2}$ بـ $\frac{n}{100}$ للمئين الأول، و $\frac{2n}{100}$ للمئين الثاني... وهكذا.

وبالتالي يمكن تعميم القانون ليصبح للربيع والعشير و المئين كالتالي:

$$A + \frac{(n.r - F_1)}{F_2 - F_1} L$$

حيث:

$r = n.Percentage$ هي رتبة الربيع أو العشير أو المئين المطلوب، و $Percentage$ هو النسبة المئوية للربيع أو العشير أو المئين المطلوب.

مثال (25):

أوجد العشير الثاني والمئين التسعين لأعمار الطلاب المبينة في جدول التوزيع المتجمع الصاعد في المثال (16)

الحل

1. لإيجاد العشير الثاني D_2 نستخدم العلاقة:

$$D_2 = A + \frac{(\frac{2n}{10} - F_1)}{F_2 - F_1} L$$

حيث إن:

A : تمثل الحد الأدنى الفئة للعشير الثاني.

n : تمثل مجموع التكرارات.

F_1 : تمثل التكرار المتجمع السابق لفئة العشير.

F_2 : تمثل التكرار المتجمع اللاحق لفئة العشير.

L : تمثل طول فئة العشير الثاني.

إن مجموع التكرارات $n = 20$ ، ورتبة العشير الثاني $\frac{2n}{10} = \frac{40}{2} = 4$.

نلاحظ أن 4 تقع بين التكرارين المتجمعين 2 و 7 وبالتالي فإن فئة العشير الثاني هي $7 - 9$، والحد الأدنى لفئة العشير الثاني (7)، وطول فئة العشير الثاني (2)، والتكرار المتجمع الصاعد الذي يسبق 4 (2)، والتكرار المتجمع الصاعد الذي يلي 4 (7).

أي:

$$A = 7, \qquad F_1 = 2, \qquad F_2 = 7, \qquad L = 9 - 7 = 2$$

$$D_2 = 7 + \frac{(\frac{2\times 20}{10} - 2)}{7 - 2} \times 2 = 7 + \frac{(4 - 2)}{7 - 2} \times 2 = 7.8$$

وبالتالي نستطيع القول أن 20% من الطلاب تقل أعمارهم عن 7.8 سنوات

2. لإيجاد المئين التسعين P_{90} نستخدم العلاقة:

$$P_{90} = A' + \frac{(\frac{90n}{100} - F'_1)}{F'_2 - F'_1} L$$

حيث إن:

A' : تمثل بداية الفئة للمئين التسعين.

n: تمثل مجموع التكرارات.

F'_1: تمثل التكرار المتجمع السابق.

F'_2: تمثل التكرار المتجمع التالي.

L: تمثل طول فئة المئين التسعين.

إن مجموع التكرارات $n = 20$ ، و مرتبة المئين التسعين $\frac{90\times 20}{100} = 18$.

نلاحظ أن 18 تقع بين التكرارين المتجمعين 15 و 19 وبالتالي فإن فئة المئين التسعين هي $11 - 13$، و بالتالي الحد الأدنى لفئة المئين التسعين

(11)، وطول فئة المئين التسعين (2) ، والتكرار المتجمع الصاعد الذي يسبق 18 (15)، والتكرار المتجمع الصاعد الذي يلي 18 (19).

أي:

$$A = 11, \qquad F_1' = 19, \qquad F_2' = 18, \qquad L = 13 - 11 = 2$$

$$P_{90} = 11 + \frac{(18 - 15)}{19 - 15} \times 2 = 12.5$$

و بالتالي نستطيع القول أن 90% من الطلاب تقل أعمارهم عن 12.5 سنة.

8- مقاييس التشتت

يقصد بالتشتت (Dispersion) دراسة مدى تقارب أو تباعد البيانات عن بعضها بعضاً أي عن مركزها أو متوسطها الحسابي. كلما كانت البيانات قريبة من بعضها البعض أي قريبة من المتوسط الحسابي تكون البيانات متجانسة، والعكس كلما كانت البيانات بعيدة عن بعضها أي بعيدة عن المتوسط الحسابي تكون البيانات متباعدة أو مشتتة. ومن مقاييس التشتت ما يلي:

8-1 المدى:

يُعرف المدى بأنه الفرق بين أكبر قيمة(Max) وأصغر قيمة (Min) للبيانات أي:

$$R = Max - Min$$

وفي حالة البيانات المجمعة (المبوبة)، يحسب المدى بطريقتين هما:

1- المدى يساوي الفرق بين مركزي الفئة العليا والفئة الدنيا.

2- المدى يساوي الحد الأعلى للفئة العليا مطروحاً منه الحد الأدنى للفئة الدنيا.

مثال (26):

احسب المدى R لدرجات الطلاب التالية:

82, 40 , 60 , 63 , 72 , 80

الحل:

$$R=82-30=52 \text{ درجة}$$

مثال (27):

أوجد المدى R لدرجات مجموعة من الطلاب المبية في جدول التوزيع التكراري (2-5)

الحل:

يمكن إيجاد المدى بطريقتين:

1- نقوم بحساب مركز الفئة العليا ويساوي 95، ومركز الفئة الدنيا ويساوي 55:

$$R = 95 - 55 = 40$$

2- نقوم بحساب الحد الأعلى للفئة العليا ويساوي 100، والحد الأعلى للفئة الدنيا ويساوي 60:

$$R = 100 - 60 = 40$$

2-8 نصف المدى الربيعي

يتأثر المدى بالقيم الشاذة (المتطرفة)، وبالتالي فهو لا يُعطي صورة صادقة عن طبيعة البيانات. لذلك دعت الحاجة إلى إيجاد مقياس آخر يتم من خلاله التخلص من القيم الشاذة وهو ما يسمى بنصف المدى الربيعي.

ويعرف كما يلي:

إذا كانت لدينا مجموعة من البيانات عددها n قيمة، فيتم ترتيب القيم تصاعدياً، وتقسم إلى أربعة أقسام متساوية، كما هو موضح على الخط الأفقي التالي:

$$Q_1 \text{———} Q_2 \text{———} Q_3$$

تسمى القيمة التي يسبقها ربع البيانات بالربيع الأول، ويُرمز له بالرمز Q_1، ورتبته $\frac{n}{4}$ ، وتسمى القيمة التي يسبقها ثلاثة أرباع البيانات بالربيع الثالث، ويُرمز له بالرمز Q_3، ورتبته $\frac{3n}{4}$، كما يُسمى المقدار الناتج من الفرق بين Q_1 و Q_3 "المدى الربيعي" يمثل النصف الأوسط للقيم، ويؤخذ نصف هذا المدى مقياساً

للتشتت، ويسمى "نصف المدى الربيعي"، ويُرمز له بالرمز Q، ويعطى من خلال العلاقة التالية:

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

ويُلاحظ أن Q_2 هو الربيع الثاني وهو القيمة التي يسبقها نصف البيانات ورتبته $\frac{n}{2}$ ، أي أن Q_2 هو الوسيط الذي سبق شرحه في مقاييس النزعة المركزية.

ويُحسب نصف المدى الربيعي للبيانات المباشرة كما يلي:

1- ترتب البيانات تصاعدياً.

2- نوجد قيمة Q_1 وهي القيمة التي يسبقها ربع البيانات.

3- نوجد قيمة Q_3 وهي القيمة التي يسبقها ثلاثة أرباع البيانات.

4- يتم تطبيق علاقة حساب نصف المدى الربيعي وهو:

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

مثال (28)

أوجد نصف المدى الربيعي لأوزان مجموعة الطلاب التالية:

67 , 65 , 69 , 58 , 55 , 71 , 72 , 70

الحل:

1- نرتب البيانات تصاعدياً على الشكل التالي:

55 , 58 , 65 , 67 , 69 , 70 , 71 , 72

2- نوجد قيمة Q_1 كما يلي، نوجد ترتيب (موقع) الربيع الأول من بين القيم وذلك من العلاقة: $8 \times \frac{25}{100} = \frac{8}{4} = 2$ ، و بما أن الناتج قيمة صحيحة فإننا نجمع القيمة التي ترتيبها 2 والقيمة التي تليها ثم نقسم الناتج على 2

$$Q_1 = \frac{58 + 65}{2} = 61.5$$

3- نوجد قيمة Q_3 كما يلي، ، نوجد ترتيب (موقع) الربيع الثالث من بين القيم وذلك من العلاقة: $8 \times \frac{75}{100} = \frac{3\times8}{4} = 6$ ، و بما أن الناتج قيمة صحيحة فإننا نجمع القيمة التي ترتيبها 6 و القيمة التي تليها ثم نقسم الناتج على 2

$$Q_3 = \frac{70+71}{2} = 70.5$$

4- يتم تطبيق العلاقة:

$$Q_1 = \frac{Q_2 - Q_1}{2} = \frac{70.5 - 61.5}{2} = 4.5$$

كما يحسب نصف المدى الربيعي للبيانات المجمعة بالطريقة نفسها التي سبق شرحها لحساب الوسيط على الشكل التالي:

يحسب الربيع الأول Q_1 بوضع $\frac{n}{4}$ بدلاً من $\frac{n}{2}$ في علاقة الوسيط:

$$Med = A + \frac{(\frac{n}{2} - F_1)}{F_2 - F_1} L$$

ويحسب الربيع الثالث Q_3 بوضع $\frac{3n}{4}$ بدلاً $\frac{n}{2}$ في علاقة الوسيط:

$$Med = A + \frac{(\frac{n}{2} - F_1)}{F_2 - F_1} L$$

وبعد ذلك نحسب نصف المدى الربيعي من العلاقة:

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

حيث:

يحسب Q_1 بالعلاقة التالية:

$$Q_1 = A_1 + \frac{(\frac{n}{4} - F_1)}{F_2 - F_1} L$$

يحسب Q_3 بالعلاقة التالية:

$$Q_3 = A_2 + \frac{(\frac{3n}{4} - F_1')}{F_2' - F_1'} L$$

مثال (29):

أوجد نصف المدى الربيعي حسابياً لدرجات الطلاب المعطاة في جدول التكرار المتجمع الصاعد (5–6)

الحل:

لدينا من الجدول ما يلي:

$$n = 50 \quad , \quad \frac{n}{4} = 12.5 \ , \quad \frac{3n}{4} = 37.5 \ , \quad L = 10$$

ولنحسب نصف المدى الربيعي لدرجات الطلاب كما يلي:

1– نوجد قيمة Q_1 كما يلي:

$$Q_1 = A_1 + \frac{(\frac{n}{4} - F_1)}{F_2 - F_1} L$$

$$Q_1 = 70 + \frac{(12.5 - 8)}{26 - 8} 10$$

$$Q_1 = 70 + 2.5 = 72.5$$

2– نوجد قيمة Q_3 كما يلي:

$$Q_3 = A_2 + \frac{(\frac{3n}{4} - F'_1)}{F'_2 - F'_1} L$$

$$= 80 + \frac{(37.5 - 26)}{42 - 26} 10$$

$$= 80 + 7.1875 = 87.1875$$

3– نوجد قيمة Q كما يلي:

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{87.1875 - 72.5}{2} = 7.343$$

من الجدير أن نذكر أن من ميزات نصف المدى الربيعي ما يلي:

- يتخلص من القيم الشاذة.
- يمكن حسابه من التوزيعات التكرارية المفتوحة من الطرفين.

أيضاً من عيوب نصف المدى الربيعي ما يلي:

- لا يأخذ جميع القيم في الحسبان.
- لا يسهل التعامل معه في التحليل الإحصائي.

3-8 الانحراف المتوسط

يعرّف الانحراف المتوسط Mean Deviation لمجموعة من البيانات $x_1, x_2, \dots, x_n$ عددها n بأنه متوسط الانحرافات المطلقة للبيانات عن وسطها الحسابي ويرمز له .M.D.

ويعرّف رياضياً كما يلي:

$$M.D. = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|$$

أما في حالة البيانات المبوبة، فيعطى الانحراف المتوسط على الشكل التالي:

$$M.D. = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_i|x_i - \bar{x}|$$

مثال (30):

أوجد الانحراف المتوسط لأعمار مجموعة الطلاب:

$$6, 5, 7, 7, 8, 9, 9, 5$$

الحل:

لننشئ الجدول التالي:

	x	$x - \bar{x}$	$\lvert x - \bar{x}\rvert$
	6	-1	1
	5	-2	2
	7	0	0
	7	0	0
	8	1	1
	9	2	2
	9	2	2
	5	-2	2
المجموع	**56**	**0**	**10**

لدينا من الجدول:

$$n = 8$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{56}{8} = 7$$

وبالتالي:

$$M.D. = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}| == \frac{10}{8} = 1.27$$

مثال (31):

أوجد الانحراف المتوسط لأعمار الطلاب المعطاة بجدول التوزيع التكراري في المثال (8).

الحل:

حدودالفئة	مركز الفئة x	التكرار f	x f	$\lvert x - \bar{x}\rvert$	$\lvert x - \bar{x}\rvert$ f
5-7	6	2	12	3.7	7.4
7-9	8	5	40	1.7	8.5
9-11	10	8	80	0.3	2.4
11-13	12	4	48	2.3	9.2
13-15	14	1	16	4.3	4.3
المجموع		**20**	**194**		**31.8**

لدينا من الجدول:

$$n = 20$$

$$\bar{x} = \frac{\sum f x}{n} = \frac{194}{20} = 9.7$$

$$M.D. = \frac{31.8}{20} = 1.59$$

4-8 الانحراف المعياري

من الصعب التعامل رياضياً (تحليلياً) مع الانحراف المتوسط. ولذلك دعت الحاجة إلى استخدام مقياس للتشتت بالقوة نفسها للانحراف المتوسط لكي يكون من السهل التعامل معه تحليلياً.

وبما أن الغاية هي التخلص من الإشارات للانحرافات فإن تربيع الانحرافات يخلصنا من الإشارات.

ولهذا فإن الانحراف المعياري (Standard Deviation) يعرف عن طريق التباين (Variance)، والذي يعرّف كما يلي:

التباين هو متوسط مربع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي. يرمز لتباين العينة بـ S^2 و لتباين المجتمع بـ σ^2.

أما الانحراف المعياري فهو الجذر التربيعي الموجب للتباين. ويُرمز للانحراف المعياري للعينة بـ S و المجتمع بـ σ.

فإذا كان لدينا مجموعة من البيانات $x_1, x_2, \dots, x_n$ ومتوسط هذه البيانات $\bar{x}$، فيعرّف التباين كما يلي:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

ويعرّف الانحراف المعياري بالعلاقة التالية:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

وفي حالة العينة التي حجمها n ومأخوذة من المجتمع، فإن الانحراف المعياري لها يُرمز له بالرمز S، ويُرمز للتباين بالرمز S^2:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

ويمكن تبسيط العلاقة:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

لتصبح على الشكل التالي:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}\right)$$

وتدعى العلاقة المختزلة لحساب التباين.

الإثبات:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2x_i\overline{x} + \overline{x}^2\right)$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\overline{x}^2\right)$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2\right)$$

ومنه:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}\right)$$

مثال (32):

احسب الانحراف المعياري لأعمار طلاب في المرحلة الابتدائية معطاة على الشكل التالي: 8 , 9 ,7 , 6 , 5

الحل:

لننشئ الجدول التالي:

	x	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$
	8	1	1
	9	2	4
	7	0	0
	6	-1	1
	5	-2	4
المجموع	**35**	**0**	**10**

من الجدول السابق لدينا:

$$n = 5$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{35}{5} = 7$$

وبالتالي يحسب التباين كما يلي:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$S^2 = \frac{1}{5-1}\,(10) = 2.5$$

ومنه يحسب الانحراف المعياري كما يلي:

$$S = \sqrt{2.5} = 1.581$$

في حالة البيانات المجمعة (المبوبة) والتي عددها n ومراكزها $x_1, x_2, \dots, x_n$، ويقابلها تكرارات $f_1, f_2, \dots, f_n$ على الترتيب فإن التباين يكون كما يلي:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2$$

كما يعطى الانحراف المعياري على الشكل التالي:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2}$$

وأيضاً تصبح العلاقة:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}\right)$$

على الشكل التالي:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right)^2}{n}\right)$$

كما تصبح العلاقة:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^2}{n}\right)$$

على الشكل التالي:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i {d_i}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} f_i d_i\right)^2}{n}\right)$$

مثال (33):

أوجد التباين و الانحراف المعياري للبيانات الموضحة في المثال (8)

الحل:

حدودالفئة	مركز الفئة x	التكرارf	x f	$(x-\bar{x})^2$	$(x-\bar{x})^2 f$
5-7	6	2	12	13.69	27.38
7-9	8	5	40	2.89	14.45
9-11	10	8	80	0.09	0.72
11-13	12	4	48	5.29	21.16
13-15	14	1	16	18.49	18.49
المجموع		**20**	**194**		**82.2**

لدينا من الجدول:

$$n = 20$$

$$\bar{x} = \frac{\sum f x}{n} = \frac{194}{20} = 9.7$$

$$S^2 = \frac{82.2}{20-1} = 4.326316$$

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{4.326316} = 2.07998$$

بعض خصائص الانحراف المعياري:

الخاصة الأولى:

إذا أضفنا أو طرحنا مقداراً ثابتاً c من جميع القراءات لمجموعة البيانات فإن الانحراف المعياري للقيم الجديدة هو نفسه الانحراف المعياري للقيم الأصلية.

الإثبات:

نفرض أن القيم الأصلية هي:

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

ونفرض أن القيم الجديدة هي:

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

فإذا أضفنا أو طرحنا من القيم الأصلية مقداراً ثابتاً c، حيث:

$$y_1 = x_1 \mp c, y_2 = x_2 \mp c, \dots, y_n = x_n \mp c$$

فإن:

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}[(y_i \mp c) - (\bar{y} \mp c)]^2$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = S_y^2$$

ملاحظة:

يمكن أن تستخدم هذه الخاصة في تبسيط البيانات، وخاصة عندما تكون قيمتها كبيرة.

مثال (34):

استخدم الخاصة الأولى للانحراف المعياري في حل المثال السابق والمتضمن حساب الانحراف المعياري لأعمار طلاب معطاة على الشكل التالي:

$$8 , 9 ,7 , 6 , 5$$

باختيار الثابت c يساوي 5؟

الحل:

نطرح المقدار الثابت من كل القيم، كما هو موضح بالجدول التالي:

x	$y = x - 5$	d^2
8	3	9
9	4	16
7	2	4
6	1	1
5	0	0

لدينا من الجدول:

$$n = 5$$
$$d = 10$$
$$y^2 = 30$$

وبالتالي يحسب التباين كما يلي:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(30 - \frac{(10)^2}{5}\right) = 2.5$$

ومنه يحسب الانحراف المعياري كما يلي:

$$S = \sqrt{2.5} = 1.581$$

وهي نفس نتيجة المثال السابق.

الخاصة الثانية:

إذا ضربنا جميع القيم في مقدار ثابت أو قسمناها على مقدار ثابت، فإن الانحراف المعياري يتأثر بذلك.

الإثبات:

نفرض أن القراءات الأصلية هي:

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

فإذا ضربنا هذه القيم في مقدار ثابت c تكون القيم الجديدة هي:

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

حيث

$$y_1 = c\,x_1, y_2 = c\,x_2, \dots, y_n = c\,x_n$$

وعليه فإن:

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{c} - \frac{\overline{y}}{c}\right)^2$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1}\,\frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2$$

$$S_x^2 = \frac{1}{c^2}S_y^2 \Longrightarrow S_x = \frac{1}{c}S_y$$

أي أن الانحراف المعياري للقيم الأصلية في حالة الضرب يساوي الانحراف المعياري للقيم الجديدة مقسوماً على المقدار الثابت c.

في حالة القسمة فإنه يمكن إثبات أن:

$$S_x = c\,S_y$$

أي أن الانحراف المعياري للقيم الأصلية في حالة القسمة يساوي الانحراف المعياري للقيم الجديدة مضروباً في المقدار الثابت c.

الخاصة الثالثة:

مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي $\bar{x}$ تكون أصغر من مجموع مربعات انحرافات القيم عن أي وسط فرضي أخر a حيث $\bar{x} \neq a$.

الإثبات:

نفرض أن القراءات الأصلية هي:

$$\sum (x-a)^2 = \sum (x+\bar{x}-\bar{x}-a)^2$$

$$= \sum [(x-\bar{x})+(\bar{x}-a)]^2$$

$$= \sum (x-\bar{x})^2 + n(\bar{x}-a)^2 + 2(\bar{x}-a)\sum (x-\bar{x})$$

$$= \sum (x-\bar{x})^2 + n(\bar{x}-a)^2$$

نلاحظ مما سبق أن المقدار هو $n(\bar{x}-a)^2$ مقدار موجب دائماً. ونستنتج من ذلك أن:

$$\sum (x-a)^2 > \sum (x-\bar{x})^2 \quad , \quad a \neq \bar{x}$$

وهو المطلوب اثباته.

ملاحظة

يعكس الانحراف المعياري صورة واضحة لتشتت البيانات حول متوسطها، فإذا كان الانحراف المعياري للبيانات صغيراً فمعنى ذلك أن الانحراف المعياري للمجتمع يكون صغيراً، و بذلك يعبر المتوسط الحسابي عن المجتمع تعبيراً صادقاً و دقيقاً.

5-8 المتغير المعياري والقيم المعيارية

إذا كان لدينا المتغير X والذي له القيم $x_1, x_2, \dots, x_n$ والتي متوسطها $\bar{x}$ وانحرافها المعياري S ، فإن المتغير Z الذي يعطى بالعلاقة:

$$Z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S}, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

حيث:

Z_i: تقيس الانحرافات عن المتوسط الحسابي بواحدات من الانحراف المعياري يسمى المتغير المعياري (القيمة المعيارية).

مثال (35):

حصل طالب على 82 درجة في مادة الإحصاء حيث كان متوسط الدرجات هو 75 درجة، وذلك بانحراف معياري 10 درجات، ثم حصل على 89 درجة في مادة الرياضيات بمتوسط درجات 81 درجة وانحراف معياري 16 درجة. أي من المقررين كانت درجة استيعاب هذا الطالب أعلى مقارنة بزملائه؟

الحل:

إذا كانت Z_1 تمثل الدرجة المعيارية للإحصاء فإن:

$$Z_1 = \frac{82-75}{10} = 0.7$$

إذا كانت Z_2 تمثل الدرجة المعيارية للرياضيات فإن:

$$Z_2 = \frac{89-81}{16} = 0.5$$

وهذا يدل على أن درجة استيعاب الطالب لمادة الإحصاء أفضل من مادة الرياضيات.

9- مقاييس الالتواء

يعرّف الالتواء (Skewness) بأنه بعد المنحنى البياني عن التماثل . و يقصد بالتماثل أنه إذا أسقطنا عموداً من قمة المنحني التكراري و قسمناه إلى قسمين منطبقين يكون التوزيع متماثلاً (متناظراً)، و خلاف ذلك يكون التوزيع غير متماثل أي ملتوياً إما إلى جهة اليمين أو إلى جهة اليسار.

ويكون منحني التوزيع التكراري ملتوياً نحو اليمين إذا كانت القيم المتطرفة نحو اليمين تؤثر على المتوسط الحسابي وتتجه به نحو اليمين، وبذلك يكون المتوسط الحسابي أكبر من الوسيط.

أما إذا كان التوزيع التكراري ملتوياً نحو اليسار فإن المتوسط الحسابي أصغر من الوسيط.

ومقياس (معامل) الالتواء له أشكال مختلفة منها:

$$s.k. = \frac{3(\bar{x} - Med)}{S}$$

أو:

$$s.k. = \frac{\bar{x} - Mod}{S}$$

كما تستخدم طريقة العزوم (Moments) لحساب الالتواء كما يلي:

$$s.k. = \frac{m_3^2}{S^3}$$

حيث m_3 هو العزم الثالث حول المتوسط الحسابي ويعطى بالعلاقة التالية:

$$m_3 = \frac{\sum(x - \bar{x})^3}{n}$$

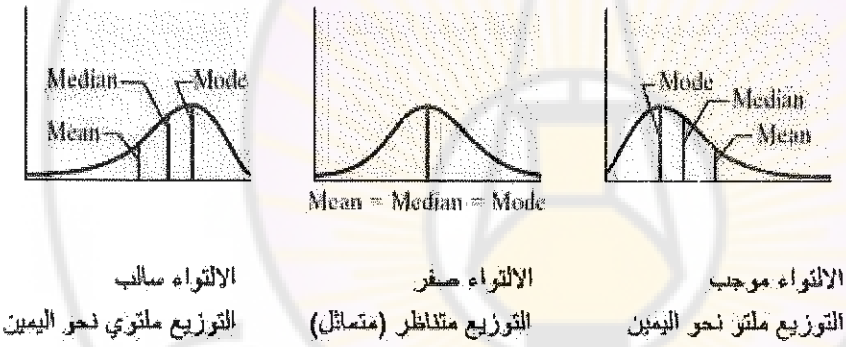
وفي حالة البيانات المبوبة

$$m_3 = \frac{\sum f(x-\bar{x})^3}{n}$$

نميز ثلاث حالات لقيمة الالتواء $s.k.$:

- $s.k. < 0$، فإن التوزيع يكون ملتوياً نحو اليسار.
- $s.k. > 0$، فإن التوزيع يكون ملتوياً نحو اليمين.
- $s.k. = 0$، فإن التوزيع يكون متماثلاً.

يبين الشكل (5-12) الحالات المختلفة للالتواء.



الشكل (5-12) الحالات المختلفة للالتواء

مثال (36):

أوجد معامل الالتواء لأعمار الطلاب الموضحة في المثال (8)

الحل:

سبق حساب القيم التالية لأعمار الطلاب:

$\bar{x} = 9.7$, $Med = 9.75, Mod = 9.857143,$ $S = 2.07998$

فيكون معامل الالتواء:

$$s.k. = \frac{3(\bar{x} - Med)}{S}$$

$$= \frac{3(9.7 - 9.75)}{2.07998}$$

$$s.k. = -0.07212$$

أيضاً يحسب معامل الالتواء:

$$s.k. = \frac{\bar{x} - Mod}{S} = -0.07555$$

نلاحظ أن قيمة الالتواء سالبة، و أن:

$$\bar{x} < Med < Mod$$

ومنه التوزيع ملتو لليسار.

10- مقاييس التفرطح (التفلطح)

يعرف التفرطح (Kurtosis) بأنه مقياس يقيس درجة علو أو انخفاض أي منحنى تكراري بالنسبة للمنحني الطبيعي والذي هو منحنى متماثل حول الرأس يمر بالمتوسط.

ويعرف معامل التفرطح K كما يلي:

$$K = \frac{m_4}{S^4} - 3$$

حيث:

$$m_4 = \frac{\sum(x - \bar{x})^4}{n}$$

وفي حالة البيانات المبوبة:

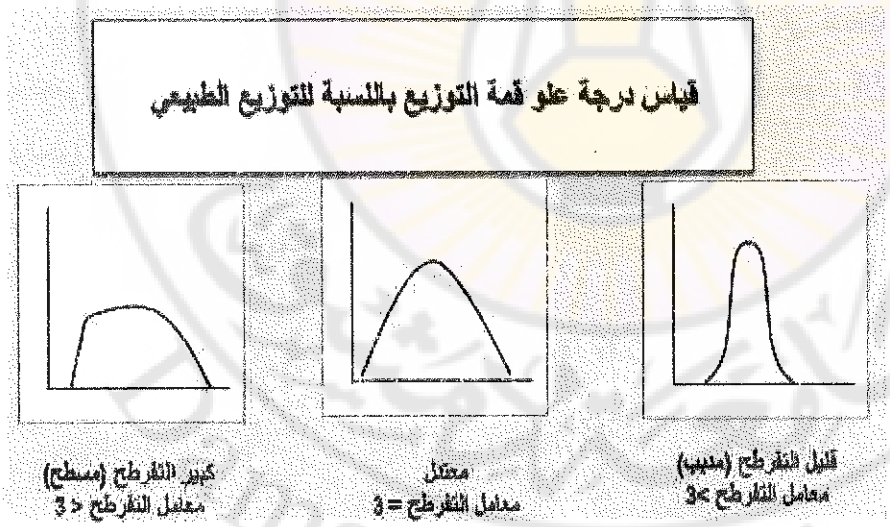
$$m_4 = \frac{\sum f(x - \bar{x})^4}{n}$$

حيث n : مجموع التكرارات.

نميز ثلاث حالات لقيمة التفرطح K:

- $K < 0$، أي قيمة معامل التفرطح للبيانات أقل من 3 فيكون المنحني مفلطح أو أكثر انخفاضاً من قمة منحنى التوزيع الطبيعي.
- $K > 0$، أي قيمة معامل التفرطح للبيانات أكثر من 3 فيكون المنحني مدبب إلى أعلى أو أكثر ارتفاعاً من قمة منحني التوزيع الطبيعي.
- $K = 0$، أي قيمة معامل التفرطح للبيانات تساوى 3 فيكون المنحني طبيعي التفرطح أو معتدل التفرطح.

يبين الشكل (5-10) الحالات المختلفة للتفرطح.



الشكل (5-10) الحالات المختلفة للتفرطح.

مثال (37):

أوجد **التفرطح** لأعمار الطلاب الموضحة في المثال (8)

الحل:

حدود الفئة	مركز الفئة x	التكرار f	x f	$(x-\bar{x})^4$	$(x-\bar{x})^2 f$
5-7	6	2	12	187.4161	374.8322
7-9	8	5	40	8.3521	41.7605
9-11	10	8	80	0.0081	0.0648
11-13	12	4	48	27.9841	111.9364
13-15	14	1	16	341.8801	341.8801
المجموع		20	194		870.474

لدينا من الجدول:

$$n = 20$$

$$m_4 = \frac{\sum f(x-\bar{x})^4}{n} = \frac{870.474}{20} = 43.5237$$

$$K = \frac{m_4}{S^4} - 3 = \frac{43.5237}{43.5237} - 3 = 1 - 3 = -2$$

نلاحظ أن التفرطح سالب، و بالتالي المنحني مفلطح أو أكثر انخفاضاً من قمة منحنى التوزيع الطبيعي

11- مبرهنة تشيبتشيف

إذا كان k عدداً أكبر أو يساوي الواحد، وكانت لدينا مجموعة البيانات التالية:

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

فإنه يوجد على الأقل :

$$1-\frac{1}{k^2}$$

من هذه البيانات واقعة ضمن المجال $[\mu-k\sigma,\mu+k\sigma]$

حيث μ متوسط المجتمع، و σ انحرافه المعياري.

كذلك فإن نسبة البيانات الواقعة خارج المجال $[\mu-k\sigma,\mu+k\sigma]$ هي على الأكثر $\frac{1}{k^2}$ من البيانات الكلية.

فمثلاً:

- من أجل $k=1$ أي انحراف معياري واحد عن الوسط الحسابي، فهناك صفر بالمئة من البيانات واقع ضمن المجال: $[\mu-\sigma,\mu+\sigma]$.
- من أجل $k=2$ أي انحرافين معياريين عن الوسط الحسابي، فهناك خمس وسبعون بالمئة من البيانات واقع ضمن المجال: $[\mu-2\sigma,\mu+2\sigma]$.
- من أجل $k=3$ أي ثلاثة انحرافات معيارية عن الوسط الحسابي، فهناك تسع وثمانون بالمئة من البيانات واقع ضمن المجال:$[\mu-3\sigma,\mu+3\sigma]$.

مثال (38):

إذا كان متوسط مجموعة من القياسات$\mu=75$ والانحراف المعياري لها $\sigma=10$.

أخذنا عينة حجمها $n=25$.

والمطلوب:

استخدام مبرهنة تشيبتشيف لوصف توزيع القياسات.

الحل:

- من أجل $K=2$ تكون النسبة المئوية الواقعة في المجال:

$$[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma] = [75 - 2 \times 10, 75 + 2 \times 10]$$
$$= [55, 95]$$

هي: 0.75%

- من أجل $K = 3$ تكون النسبة المئوية الواقعة في المجال:

$$[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma] = [75 - 3 \times 10, 75 + 3 \times 10]$$
$$= [45, 105]$$

هي 0.88%

- من أجل $K = 4$ تكون النسبة المئوية الواقعة في المجال:

$$[\mu - 4\sigma, \mu + 4\sigma] = [75 - 4 \times 10, 75 + 4 \times 10]$$
$$= [35, 115]$$

هي 0.9375%

مثال (39):

إذا كان متوسط الطول لمجموعة من الشبان (169) سم بانحراف معياري 8 سم.

أخذنا عينة حجمها 720 شاباً، و المطلوب:

1- عين المجال الذي يحوي على الأقل 640 منهم

2- ما المجال الذي يقع خارجه على الأكثر 180 منهم

الحل:

من المسألة لدينا: $\mu = 169, \sigma = 8, n = 720$:

1- لنحسب k

$$(1 - \frac{1}{k^2})n = 640$$

$$(1 - \frac{1}{k^2})720 = 640$$

$$1-\frac{1}{k^2}=\frac{8}{9}$$
$$\frac{1}{k^2}=\frac{1}{9}$$
$$k=3$$

إذن 640 من الشبان تقع أطوالهم ضمن المجال:

$$[\mu-k\sigma,\mu+k\sigma]=[169-3(8),169+3(8)]$$
$$=[151,187]$$

2- لنحسب k

$$\frac{1}{k^2}n=180$$

$$\frac{1}{k^2}720=180$$

$$\frac{1}{k^2}=\frac{1}{4}$$

$$k=2$$

إذن 180 من الشبان تقع أطوالهم خارج المجال:

$$[\mu-k\sigma,\mu+k\sigma]=[169-2(8),169+2(8)]$$
$$=[153,185]$$

مثال (40):

أعلنت إحدى الشركات عن 80 وظيفة شاغرة، فتقدم إليها 1100 شخص، و بعد إجراء اختبار لهم تبين أن متوسط درجات المتسابقين (175) و الانحراف المعياري قدره (10) درجات.

والمطلوب:

1- أوجد العدد الأصغري للذين حصلوا على درجات ضمن المجال $[125, 225]$؟

2- أوجد العدد الأعظمي للذين حصلوا على درجات تقع خارج المجال $[145, 205]$؟

الحل:

من المسألة لدينا: $\mu = 175, \sigma = 10, n = 1100$.

1- نقوم أولاً بتحديد قيمة k ،

لدينا:

$$[125, 225] = [\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]$$
$$[125, 225] = [175 - 10k, 175 + 10k]$$

ومنه:

$$125 = 175 - 10k$$
$$225 = 175 + 10k$$

بالحل المشترك نجد:

$$k = 5$$

ومنه العدد الأصغري للأشخاص الذين تقع درجاتهم في المجال $[125, 225]$هو على الأقل:

$$\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) n = \left(1 - \frac{1}{25}\right) 1100 = 1056$$

2- نقوم أولاً بتحديد قيمة k ،

لدينا:

$$[145, 205] = [\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]$$
$$[145, 205] = [175 - 10k, 175 + 10k]$$

ومنه:

$$145 = 175 - 10k$$
$$205 = 175 + 10k$$

بالحل المشترك نجد:

$$k = 3$$

ومنه العدد الأعظمي للأشخاص الذين تقع درجاتهم خارج المجال $[145, 205]$هو على الأكثر:

$$\frac{n}{k^2} = \frac{1100}{9} = 122$$

مثال (41):

تقدم لامتحان إحدى المواد في إحدى السنوات 540 طالباً فكان متوسط الدرجات في هذه المادة هو 31 بانحراف معياري قدره 8 درجات.

والمطلوب:

أوجد العدد الأعظمي للطلاب الذين حصلوا على درجات تقع خارج المجال $[7, 55]$؟

الحل:

من المسألة لدينا: $\mu = 31, \sigma = 8, n = 540$.

نقوم أولاً بتحديد قيمة k ،

لدينا:

$$[7, 55] = [\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]$$
$$[7, 55] = [31 - 8k, 31 + 8k]$$

ومنه:

$$7 = 31 - 8k$$
$$55 = 31 + 8k$$

بالحل المشترك نجد:

$$k = 3$$

ومنه العدد الأعظمي للأشخاص الذين تقع درجاتهم خارج المجال [55 ,7] هو على الأكثر:

$$\frac{n}{k^2} = \frac{540}{9} = 60$$

تمارين

السؤال الأول:

يبين الجدول التالي أجور 70 عاملاً في شركة الغزل والنسيج في اليوم الواحد:

فئات الأجور	عدد العمال
50-60	8
60-70	10
70-80	16
80-90	15
90-100	10
100-110	8
110-120	3

والمطلوب:

1- ارسم المضلع التكراري لهذه البيانات.

2- ارسم المنحني التكراري والمنحني المتجمع الصاعد لهذه البيانات.

3- ارسم المنحني المتجمع الهابط لهذه البيانات.

السؤال الثاني:

يبين الجدول عدد الموظفين لجميع فروع شركة كبيرة والبالغ عددها 22 فرعاً.

12	8	7	8	15	9	6	15	12	11	8
3	11	8	17	12	11	8	14	21	7	9

والمطلوب:

1- أوجد المنوال لعدد الموظفين في فروع الشركة كافة.

2- أوجد الوسيط لعدد الموظفين في فروع الشركة كافة.

3- أوجد الوسط الحسابي لعدد الموظفين في فروع الشركة كافة.

4- أوجد الانحراف المتوسط لعدد الموظفين في فروع الشركة كافة.

5- أوجد التباين لعدد الموظفين في فروع الشركة كافة.

6- أوجد الانحراف المعياري لعدد الموظفين في فروع الشركة كافة.

السؤال الثالث:

يبين الجدول التالي البيانات الخاصة بسرعة المركبات (كم/ساعة) التي تسير في الشوارع الرئيسية في المدينة؟

52	45	49	46	50	52	48	51	58	45	50	44	45	50
49	55	59	49	55	59	49	48	51	46	47	50	49	47

والمطلوب:

1- أوجد الوسط الحسابي؟

2- أوجد المنوال؟

3- أوجد المتوسط الهندسي؟

4- أوجد المتوسط التوافقي؟

5- أوجد الانحراف المتوسط؟

6- أوجد التباين ؟

7- أوجد الانحراف المعياري؟

8- أوجد مقاييس الالتواء ؟

9- أوجد مقاييس التفرطح؟

السؤال الرابع:

عند دراسة أطوال مجموعة من الأطفال حديثي الولادة كانت أطوالهم كالتالي:

$$70, 70, 70, 70, 70, 70, 70$$

والمطلوب:

1- أوجد المتوسط الحسابي لأطوال الأطفال؟

2- أوجد المنوال لأطوال الأطفال؟

3- أوجد المتوسط الهندسي لأطوال الأطفال؟

4- أوجد المتوسط التوافقي لأطوال الأطفال؟

5- أوجد الانحراف المتوسط لأطوال الأطفال؟

6- أوجد التباين لأطوال الأطفال؟

7- أوجد الانحراف المعياري لأطوال الأطفال؟

8- أوجد مقاييس الالتواء لأطوال الأطفال؟

9- أوجد مقاييس التفرطح لأطوال الأطفال؟

السؤال الخامس:

يمثل الجدول التالي المصاريف الشهرية بآلاف الليرات السورية:

الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9
المصروف	23	17	12	10	14	19	26	18	10

والمطلوب:

1- أوجد المتوسط الحسابي للمصارف الشهرية؟

2- أوجد المنوال؟

3- أوجد المتوسط الهندسي؟

4- أوجد المتوسط التوافقي؟

5- أوجد الانحراف المتوسط؟

6- أوجد التباين ؟

7- أوجد الانحراف المعياري؟

8- أوجد مقاييس الالتواء ؟

9- أوجد مقاييس التفرطح؟

السؤال السادس:

يمثل الجدول التالي توزيع 50 طرداً بريدياً حسب الوزن بالكيلوغرام:

التكرار	حدود الفئة
2	6 -8
14	8 -12
18	12 -20
10	20 -30
6	30 -50

والمطلوب:

1- أوجد المتوسط الحسابي لأوزان الطرود البريدية؟

2- أوجد المنوال لأوزان الطرود البريدية ؟

3- أوجد المتوسط الهندسي لأوزان الطرود البريدية ؟

4- أوجد المتوسط التوافقي لأوزان الطرود البريدية ؟

5- أوجد الانحراف المتوسط لأوزان الطرود البريدية ؟

6- أوجد التباين لأوزان الطرود البريدية ؟

8- أوجد مقاييس الالتواء لأوزان الطرود البريدية ؟

9- أوجد مقاييس التفرطح لأوزان الطرود البريدية ؟

السؤال السابع:

يبين الجدول التالي توزع الأجر اليومي بالليرة السورية لعمال أحد المصانع:

فئات الأجر	عدد العمال
200-300	9
300-400	12
400-500	15
500-600	8
600-700	4
700-800	2

والمطلوب:

1- أوجد المتوسط الحسابي لأجور العمال؟

2- أوجد المنوال لأجور العمال؟

3- أوجد الوسيط لأجور العمال؟

4- أوجد المتوسط الهندسي لأجور العمال؟

5- أوجد المتوسط التوافقي لأجور العمال؟

6- أوجد الانحراف المتوسط لأجور العمال؟

7- إذا كان الأجر اليومي لكل عامل يزيد بمقدار 50 ليرة كل ستة أشهر، فما قيمة المقاييس السابقة بعد سنة.

8- أوجد الرُبيع الأول لأجور العمال؟

9- أوجد الرُبيع الثالث لأجور العمال؟

10- أوجد العُشير الرابع لأجور العمال؟

11- أوجد العُشير السابع لأجور العمال؟

12- أوجد المئين 33 لأجور العمال؟

13- أوجد المئين 75 لأجور العمال؟

الفصل السادس

أساسيات علم الاحتمالات

1- مفاهيم علم الاحتمالات

كلمة "احتمال" هي كلمة ينطق بها الكثير من الناس، فبعض خبراء الأرصاد الجوية يقولون من المحتمل سقوط أمطار اليوم، احتمال ارتفاع في درجات الحرارة، وبعض خبراء البورصة يقولون احتمال ارتفاع قيمة الأسهم المتداولة في سوق المال لشركة معينة، خلال هذا اليوم، واحتمال نجاح طالب، واحتمال إصابة نوع معين من الفاكهة بنوع من البكتريا، وهكذا، يكثر نطق الأفراد بها وربما يجهلون معناها. فماذا تعني كلمة احتمال؟

يقصد بهذه الكلمة فرصة حدوث أو وقوع حادثة معينة، وتستخدم الاحتمالات في كثير من النواحي التطبيقية، مثل المجالات الاقتصادية، والتجارية، والزراعية، والطبية، والسلوكية، وغيرها، خاصة عند اتخاذ القرار في دراسات الجدوى، والتنبؤ بسلوك الظواهر المختلفة، ولكي يمكن فهم موضوع الاحتمال، وأهميته في النواحي التطبيقية، نقوم بعرض بعض المفاهيم الخاصة بالاحتمالات.

1-1 التجارب العشوائية

عندما نجري تجاربـاً عشوائية (Random Experiments) معينة تحت شروط مثالية معينة، نحصل على النتائج نفسها أو قريبة جداً من بعضها. وبالتالي يمكننا تحت هذه الشروط التحكم بقيم المتغيرات التي تؤثر في نتائج التجارب.

ولكن في بعض التجارب نحن غير قادرين على التحكم بقيم متغيرات معينة، وبالتالي نحصل على نتائج تختلف من تجربة إلى أخرى على الرغم من أن تلك التجارب أجريت تحت الشروط نفسها، ويطلق على هذه التجارب تجارب عشوائية.

وبالتالي نستنتج أن التجربة العشوائية هي التجربة التي يتحكم في نتائجها عامل التخمين و المصادفة.

مثال (1):

في تجربة إلقاء قطعة نقود نحصل على أحد الاحتمالين؛ إما كتابة T (Tail) أو صورة H (Head). وأحياناً يستعاض عن T بصفر "0" للتعبير عن الشعار، ويستعاض عن H بواحد "1" للتعبير عن الصورة.

مثال (2):

في تجربة إلقاء حجر النرد نحصل على النتائج التالية:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

مثال (3):

في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين نحصل على النتائج التالية:

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

1- 2 فضاء العينة

يعرّف فضاء العينة (Sample Space) بأنه مجموعة (Set) النتائج الممكنة لتجربة عشوائية، وكل نتيجة تسمى نقطة عينة (Sample Point). وغالباً يمكن أن توّصف نتائج تجربة عشوائية معينة بأكثر من فضاء عينة واحد.

فإذا كان فضاء العينة يتألف من عدد منته من النقاط؛ فعندئذ يدعى فضاء عينة منته (Finite Sample Space).

أما إذا كان فضاء العينة يتألف من عدد غير منته من النقاط؛ فعندئذ يُدعى فضاء عينة غير منته قابل للعدّ (Countably Infinite Sample Space).

ويسمى فضاء العينة سواء كان منته أو غير منته قابل للعد فضاء عينة منفصل أو متقطع (Discrete Sample Space) ، بينما يسمى فضاء العينة غير المنتهي وغير قابل للعد فضاء عينة غير متقطع أو مستمر (Non discrete Sample Space).

مثال (4):

في تجربة إلقاء حجر نرد يكون فضاء العينة أو مجموعة كل النتائج الممكنة للتجربة:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

ويمكن أن يكون فضاء العينة على الشكل التالي:

$$S = \{(\text{Even})\text{زوجي} , (\text{Odd})\text{فردي}\}$$

ولكن فضاء العينة الأخير غير كاف لتعيين فيما إذا كانت نتيجة التجربة تقبل القسمة على الرقم 3 أم لا.

مثال (5):

في تجربة إلقاء قطعة نقود نحصل على الحدث H أوالحدث T. ويكون فضاء العينة:

$$S = \{H, T\}$$

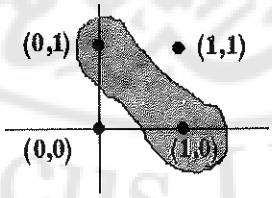
1- 3 الحدث

يعرّف الحدث (Event) بأنه مجموعة جزئية (Subset) A من فضاء العينة S. فإذا كانت نتيجة التجربة مجموعة جزئية من A، فنقول إن الحدث A قد وقع.

غالباً ما يسمى الحدث المؤلف من نقطة وحيدة من فضاء العينة S " حدث بسيط أو ابتدائي" (Simple or Elementary Event).

مثال (6):

في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين، نحصل على الحدث (0,1)، والحدث (1,0). والشكل (6-1) التالي يوضح ذلك:



الشكل (6-1) يبين الأحداث في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين

يوجد أيضاً أحداث خاصة، وهي:

1- الحدث الأكيد (Certain Event):

هو الحدث S لأن كل نتيجة نحصل عليها تنتمي لفضاء العينة S.

2- الحدث المستحيل (Empty Event)

هو الحدث $\emptyset$ لأن كل نتيجة نحصل عليها لا تنتمي للمجموعة الخالية $\emptyset$.

ويمكن باستخدام العمليات على المجموعات وتطبيقها على الأحداث في S أن نحصل على أحداث جديدة، ومنها:

1- اتحاد حدثين:

اتحاد حدثين (Union Events) A و B حدث يقع إذا وقع أحد الحدثين A أو B أو كلاهما. ونرمز له بالرمز: $A \cup B$.

إن اتحاد n من الأحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ من فضاء العينة S هو حدث يقع إذا وقع أحدها على الأقل. ونرمز له بالرمز:

$$\bigcup_{i=1}^{i=n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

2- تقاطع حدثين:

تقاطع حدثين A و B (Intersection Events) حدث يقع إذا وقع الحدثان A و B معاً. ونرمز له بالرمز: $A \cap B$.

إن تقاطع n من الأحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ من فضاء العينة S هو حدث يقع إذا وقعت جميع الأحداث في آن واحد. ونرمز له بالرمز:

$$\bigcap_{i=1}^{i=n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

3- متمم الحدث:

متمم الحدث A (Complement Events) حدث يحوي سائر الأحداث الابتدائية من فضاء العينة غير المحتواة في الحدث A. ونرمز له بالرمز:

$$A' = S - A.$$

4- فرق حدثين:

فرق حدثين A و B هو حدث يقع إذا وقع A ولم يقع B. ونرمز له بالرمز:

$$A - B$$

ويحسب كما يلي:

$$A - B = A \cap B'$$

5- الحدثان المتتامان:

الحدثان المتتامان هما الحدثان اللذان لابد من وقوع أحدهما، ويقع أحدهما إذا لم يقع الآخر حتماً.

أي يكون A و B حدثين متتامين إذا كان:

$$A \cup B = S \quad \text{و} \quad A \cap B = \emptyset$$

6- الحدثان المتنافيان:

الحدثان المتنافيان (Mutually Exclusive) هما الحدثان اللذان يستحيل وقوعهما معاً.

أي نقول أن A و B حدثان متنافيان إذا وفقط إذا كان تقاطعهما هو المجموعة الخالية حتماً. أي أن وقوع أحد الحدثين ينفي وقوع الحدث الأخر في الوقت نفسه.

$$A \cap B = \emptyset$$

ويمكن القول إن مجموعة من الأحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ متنافية مثنى مثنى إذا كان كل حدثين في المجموعة متنافيين مثنى مثنى.

مثال (7):

في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين، لدينا الحدث A ظهور صورة واحدة على الأقل H، والحدث B ظهور كتابة في الرمية الثانية T. عندئذ:

$A = \{HT, TH, HH\}$
$B = \{HT, TT\}$

والمطلوب:

إيجاد الأحداث التالية:

1- $A \cup B$ ؟

2- $A \cup B$ ؟

3- $A \cap B$ ؟

4- A' ؟

5- $A - B$ ؟

الحل:

$A \cup B = \{HT, TH, HH, TT\} = S$
$A \cap B = \{HT\}$
$A' = \{TT\}$
$A - B = \{TH, HH\}$

7- قانونا دمورغان:

إذا كان A و B حدثين فإن:

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$
$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

2- طرائق العدّ

تنشأ المشاكل عندما يكون عدد نقاط فضاء العينة كبيراً جداً ويصبح من المستحيل حصرها (عدها). ولحل هذه المشاكل أُستخدم ما يسمى طرائق العد (Counting Methods) وهي:

1-2 مخطط شجرة

لإنجاز k من الأشياء يتم كما يلي:

الشيء الأول يمكن أن ينجز بـ n_1 طريقة مختلفة، والشيء الثاني يمكن أن ينجز بـ n_2 طريقة مختلفة، والشيء k يمكن أن ينجز بـ n_k طريقة مختلفة. وبالتالي يمكن أن تنجز k من الأشياء في ترتيب محدد بـ $n_1\ n_2 \dots n_k$ طريقة مختلفة. وهذا ما يسمى "المبدأ الأساسي في العدّ".

ويمكن استخدام مخطط الشجرة (Tree Diagram) لتوضيح الطرائق المختلفة، حيث إنه يعتمد على المبدأ السابق، وسمي مخطط الشجرة بسبب شكله الذي يشبه الشجرة.

مثال (8):

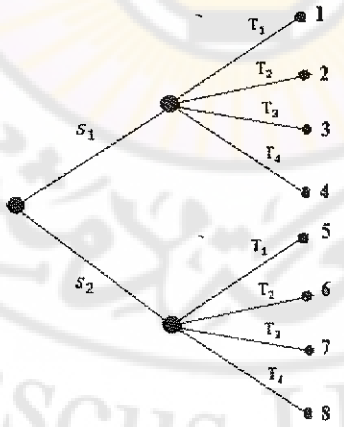
يملك رجل اثنين من القمصان (S) وأربعاً من ربطات العنق (T)، بكم طريقة مختلفة يستطيع أن يختار هذا الرجل قميصاً وربطة عنق؟

الحل:

عدد الطرق المختلفة التي يستطيع الرجل أن يختار قميصاً وربطة عنق هي:

$$2 \times 4 = 8$$

ويمكن تمثيل ذلك بواسطة مخطط الشجرة على الشكل (6-2) التالي:



الشكل (6-2) مخطط الشجرة

مثال (9):

إذا احتوى امتحان إحدى المواد 12 سؤالاً تتم الإجابة على كل منها بصح أو خطأ، فبكم طريقة مختلفة يمكن للطالب أن يؤشر على ورقة الفحص بإجابة واحدة لكل سؤال؟

الحل:

بما أنه يمكن الإجابة على كل سؤال بطريقتين مختلفتين، فإن عدد الطرائق:

$$2^{12} = 4096$$

مثال (10):

نريد إعداد لوحات لمجموعة من السيارات في مدينة ما بحيث تكون حروفها مكونة من حرفين من الحروف التالية: X, Y, Z و أرقامها مكونة من ثلاثة أر قام من بين الأرقام التالية $1, 3, 7, 9$، على أن لا يتكرر أي حرف أو أي رقم أكثر من مرة واحدة، و المطلوب إيجاد عدد الطرائق الممكنة؟

الحل:

يتم اختيار الحرف الأول بثلاث طرائق ، بينما يتم اختيار الحرف الثاني بطريقتين، و منه عدد طرائق اختيار حرفين من الحروف X, Y, Z هو:

$$3 \times 2 = 6$$

يتم اختيار العدد الأول بأربع طرائق و يتم اختيار العدد الثاني بثلاث طرائق بينما يتم اختيار العدد الثالث بطريقتين، وبالتالي عدد طرق اختيار ثلاثة أرقام هو:

$$4 \times 3 \times 2 = 24$$

و منه عدد طرائق الاختيار الممكنة هو :

$$6 \times 24 = 144$$

2-2 التباديل

يدعى كل تقابل لمجموعة عدد عناصرها n على ذاتها تبديلاً (Permutation) لهذه المجموعة. إن عدد تباديل مجموعة عدد عناصرها n هو:

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots 3.2.1$$

ملاحظة:

$$0! = 1$$

مثال (11):

بكم طريقة يمكن لستة أشخاص أن يشغلوا ستة مناصب مختلفة؟

الحل:

نطبق العلاقة:

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1$$

كما يلي:

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

2-3 التراتيب

تعرّف التراتيب (Arrangements) بأنها نسق مرتب لعدد محدد r من العناصر مختارة من مجموعة تحوي n عنصراً متمايزاً، حيث $r \leq n$.

أي أن الترتيب هو نسق حجمه r مأخوذاً من مجموعة تحوي n عنصراً متمايزاً، و اختيار العنصر الأول من النسق يتم بـ n طريقة و الثاني بـ $n-1$ طريقة،.....، و العنصر r بـ $n-r+1$ طريقة. و بالتالي فإن عدد الطرائق الممكنة يساوي:

$$P_r^n = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

حيث يمثل P_r^n عدد التبديلات أو الترتيبات لـ r عنصراً مأخوذاً من مجموعة عدد عناصرها n.

وعندما $r = n$ تصبح العلاقة السابقة:

$$P_r^n = n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1 = n!$$

مثال (12):

بكم طريقة مختلفة نحتاج لتشكيل كلمة مؤلفة من ثلاثة حروف باستخدام الحروف التالية: A, B, C, D, E, F, G ؟

الحل:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 7.6.5 = 210$$

4-2 التوافيق

تعرّف التوافيق (Combinations) بأنها اختيار عدد محدد r من العناصر من مجموعة تحوي n عنصراً دون الاهتمام بترتيب العناصر.

فعلى سبيل المثال، في حالة التباديل: abc هي تبديله مختلفة عن bca، أي نهتم بالترتيب. بينما في حالة التوافيق abc وbca هما نفس التوفيقة، أي لا نهتم بالترتيب. تعطى التوافيق بالعلاقة التالية:

$$\binom{n}{r} = C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \qquad (1)$$

حيث نرمز لعدد التوافيق بالرمز $C(n,r)$ أو $\binom{n}{r}$.

أيضاً تكتب العلاقة السابقة (1) بالشكل التالي:

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{P_r^n}{r!}$$

ونستطيع أن نلاحظ:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

مثال (13):

بكم طريقة يمكن سحب ثلاث بطاقات من بين 8 بطاقات؟

الحل:

$$\binom{8}{3} = C(8,3) = \frac{8!}{3!\,(8-5)!} = \frac{8.7.6}{3!} = 56$$

مثال (14):

بكم طريقة يمكن اختيار لجنة تضم طالبتين و ثلاثة طلاب من مجموعة مكونة من خمس طالبات و تسعة طلاب؟

الحل:

إن عدد طرائق اختيار طالبتين هو :

$$\binom{5}{2} = C(5,2) = \frac{P_2^5}{2!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

إن عدد طرائق اختيار ثلاثة طلاب هو :

$$\binom{9}{3} = C(9,3) = \frac{P_3^9}{3!} = \frac{9 \times 8 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 84$$

حسب المبدأ الأساسي للعد يكون عدد طرق اختيار اللجنة هو:

$$C(5,2)C(9,3) = 10 \times 84 = 840$$

ملاحظة:

نلاحظ أن مسألة اختيار مجموعة عدد عناصرها r من مجموعة عدد عناصرها n، حيث $r \leq n$ تكافئ مسألة تجزيء مجموعة تحوي n عنصراً متمايزاً إلى مجموعتين بحيث تحوي الأولى r عنصراً و الثانية $n - r$ عنصراً، أي أن عدد الطرائق المختلفة التي يتم بها تجزيء مجموعة تحوي n عنصراً متمايزاً إلى مجموعتين الأولى تحوي n_1 عنصراً والثانية n_2 عنصراً $(n_2 = n - n_1)$ هو:

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!}$$

هذا الدستور يقبل التعميم و يمكن القول بشكل عام إن عدد طرائق تجزيء مجموعة تحوي n عنصراً متمايزاً إلى r مجموعة تحوي الأولى n_1 عنصراً والثانية n_2 عنصراً و ... و المجموعة r تحوي n_r عنصراً يساوي:

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\dots\,n_r!}$$

حيث:

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$$

مثال (15):

بكم طريقة مختلفة يمكن أن نوزع تسع ألعاب مختلفة على ثلاثة أطفال حسن، وأحمد، ووائل، فإذا كنا نريد إعطاء حسن أربع ألعاب، و إعطاء أحمد ثلاث ألعاب، و إعطاء وائل لعبتين؟

الحل:

$$P_{1!4!4!2!}^{9!} = \frac{9!}{4!\,3!\,2!} = 1260$$

مثال (16):

بكم طريقة مختلفة يمكن تشكيل كلمة مكونة من 11 حرفاً من حروف الكلمة التالية:

M I S S I S S I P P I

الحل:

تتضمن الكلمة إحدى عشرة حرفاً، و يتكرر الحرف M مرة واحدة، و الحرف I أربع مرات، و الحرف S أربع مرات و الحرف P مرتين، و بالتالي عدد الكلمات المختلفة ذات الطول 11 و التي يمكن تكوينها هو:

$$P_{1!4!4!2!}^{11!} = \frac{11!}{1!\,4!\,4!\,2!} = 34.650$$

3- الاحتمال وخصائصه

3-1 التعريف العددي للاحتمال

يعرّف احتمال الحدث A بأنه عدد الحالات الملائمة (المواتية) لوقوع الحدث A مقسوماً على عدد الحالات الممكنة لفضاء العينة S:

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة لوقوع } A}{\text{عدد الحالات الممكنة لفضاء العينة } S}$$

حيث نرمز لاحتمال وقوع الحدث A بالرمز $P(A)$.

نشترط من التعريف السابق مبدأ تكافؤ الفرص لجميع العناصر الموجودة في فضاء العينة، و أن يكون فضاء العينة منتهياً.

2-3 بديهيات الاحتمال

ندعو $P: S \to R$ دالة الاحتمال إذا تحققت الشروط التالية:

1- $\forall A \subseteq S : P(A) \geq 0$.

2- $P(S) = 1$.

3- من أجل متتالية من الأحداث المتنافية مثنى مثنى:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

فإن:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup .. \cup A_n \cup ..) = P(A_1) + P(A_2) + .. + P(A_n) + ..$$

وبشكل خاص من أجل أي حدثين A_1, A_2 متنافيين، فإن:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

نستنتج من البديهيات السابقة ما يلي:

1- من أجل أي حدث A فإن: $0 \leq P(A) \leq 1$

2- $P(\emptyset) = 0$

3- إذا كان الحدث A' متمماً للحدث A فإن:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

4- إذا كان A و B حدثين، وكان:

$$A \subseteq B$$

عندئذ:

1. $P(A) \leq P(B)$
2. $P(A - B) = P(B) - P(A)$

5- إذا كان الحدثان A و B غير متنافيين، فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

وبشكل عام، إذا كانت A و B و C أحداث غير متنافية، فإن:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

مثال (17):

إذا كان احتمال إصابة نبات معين بالمرض A هو $\frac{1}{4}$، واحتمال أن يصاب بالمرض B هو $\frac{1}{3}$، واحتمال أن يُصاب بأحد المرضين A أو B هو $\frac{1}{2}$، فما احتمال أن يصاب النبات بالمرضين A و Bمعاً؟

الحل:

لدينا:

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(B) = \frac{1}{3} \quad , \quad P(A) = \frac{1}{4}$$

وبالتالي:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

مثال (18):

يرغب طالب في دراسة الطب فلجأ لمراسلة الجامعات عن طريق مؤسستين X و Y بقصد تحصيل قبول عن طريقها، فإذا كان :

احتمال أن يؤمن قبول عن طريق المؤسسة X هو 0.7

احتمال أن يؤمن قبول عن طريق المؤسسة Y هو 0.4

احتمال أن إحدى المؤسستين لن تؤمن له قبول هو0.75

والمطلوب: عين احتمال الحصول على قبول من إحدى المؤسستين؟

الحل:

ليكن A حدث القبول عن طريق المؤسسة X و بالتالي: $P(A) = 0.7$

ليكن B حدث القبول عن طريق المؤسسة Y و بالتالي: $P(B) = 0.4$

عندئذ يكون $A' \cup B'$ الحدث الدال على عدم تحصيل قبول من إحدى المؤسستين،

و بالتالي: $P(A' \cup B') = P(A \cap B)' = 0.75$

ولنحسب: $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - [1 - P(A \cap B)']$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - 1 + P(A' \cup B')$$
$$P(A \cup B) = 0.7 + 0.4 - 1 + 0.75 = 0.85$$

4- الاحتمال الشرطي

يعرّف الاحتمال الشرطي (Conditional Probability) للحدث A علماً أن الحدث B قد وقع فعلاً، كما يلي:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad , \quad P(B) \neq 0$$

مثال (19):

أظهر تصنيف لطلاب الجامعة أن:

النسبة المئوية للطلاب الذين يدخنون 10%.

النسبة المئوية للطلاب الذين يشربون القهوة 30%.

النسبة المئوية للطلاب الذين يدخنون و يشربون القهوة 5%.

المطلوب:

1- احسب النسبة المئوية للطلاب الذين لا يدخنون ولا يشربون القهوة

2- من بين الطلاب المدخنين، ما النسبة المئوية للطلاب الذين يشربون القهوة؟

الحل:

ليكن A حدث أن الطالب يدخن، عندئذ: $P(A) = 0.10$

ليكن B حدث أن الطالب يشرب القهوة، عندئذ: $P(B) = 0.30$

$A \cap B$ حدث أن الطالب يدخن ويشرب القهوة، ومنه: $P(A \cap B) = 0.05$

1- لنرمز بـ D لحدث أن الطالب لا يدخن و لا يشرب القهوة عندئذ:

$D = A' \cap B'$ و بالتالي:

$$P(D) = P(A' \cap B')$$

$$P(D) = P(A \cup B)'$$

$$P(D) = 1 - P(A \cup B)$$

$$P(D) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

$$P(D) = 1 - 0.10 - 0.30 + 0.05 = 0.65$$

و بالتالي النسبة المئوية للطلاب الذين لا يدخنون و لا يشربون القهوة هي 65%.

2- الحدث المطلوب: B/A عندئذ:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.05}{0.10} = 0.5$$

و بالتالي النسبة المئوية للطلاب الذين يشربون القهوة من بين المدخنين 50%.

5- الأحداث المستقلة

نقول عن حدثين A, B من فضاء العينة S إنهما مستقلان (Independent Events) إذا تحقق أحد الشرطين التاليين:

1- احتمال تقاطع الحدثين المستقلين A, B يساوي حاصل جداء احتمال كل من الحدثين B, A. أي :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

2- احتمال وقوع الحدث A لا يتأثر بوقوع أو عدم وقوع B. أي:

$$P(A|B) = P(A)$$

5-1 استقلال ثلاثة أحداث

إذا كانت لدينا ثلاثة أحداث A, B, C، فإننا نقول عنها إنها مستقلة إذا تحقق الشرطان التاليان:

1- الأحدث A, B, C مستقلة مثنى مثنى.

2- $P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$

5-2 مبرهنة

إذا كانت الأحدث A, B, C مستقلة فإن الأحداث A', B', C' مستقلة أيضاً.

مثال (20):

لدى مدير إدارة ما اجتماعين في نفس اليوم أحدهما في الصباح والآخر في المساء.

فإذا كان A يمثل الحدث: أن المدير تأخر عن اجتماع الصباح، وأن B هو الحدث: تأخر المدير عن اجتماع المساء.

والمطلوب:

1- إذا كان:

$$P(A \cap B) = 0.25 \;, \qquad P(B) = 0.5 \quad , \quad P(A) = 0.4$$

فهل الحدثان A و B مستقلان؟

2- إذا كان A و B حدثين مستقلين، وكان:

$$P(B) = 0.5 \quad , \quad P(A) = 0.4$$

فما احتمال ألا يتأخر المدير عن الاجتماعين؟

الحل:

1- لنختبر شرط الاستقلال:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

لدينا:

$$P(A \cap B) = 0.25$$
$$P(A)P(B) = 0.4 \times 0.5 = 0.2$$

ومن الواضح أن شرط الاستقلال غير محقق في هذه الحالة حيث إن:

$$P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

2- إن احتمال ألا يتأخر المدير عن الاجتماعين هو:

$$P(A \cup B)' = P(A' \cap B')$$

وبما أن الحدثين A و B مستقلان، فإن A' و B' حدثان مستقلان، ومنه:

$$\begin{aligned} P(A \cup B)' &= P(A')P(B') \\ &= \big(1 - P(A)\big)(1 - P(B)) \\ &= (1 - 0.4)(1 - 0.5) \\ &= (0.6)(0.5) = 0.3 \end{aligned}$$

أي أن احتمال أن لا يتأخر المدير عن الاجتماعين هو 0.30 .

مثال (21):

لدى مطعم صغير سيارتان لتوصيل الطلبات تعملان مستقلتان عن بعضهما بعضاً، فإذا كان احتمال وجود سيارة جاهزة للاستعمال عند الاستدعاء هو 90%

والمطلوب:

1- ما احتمال وجود سيارة على الأقل مجهزة للاستعمال عند الطلب؟

2- ما احتمال أن تكون سيارة واحدة فقط جاهزة للاستعمال عند الطلب؟

3- ما احتمال أن تكون السيارتان غير جاهزتين للاستخدام عند الطلب؟

الحل:

1- بفرض أن A هو حدث أن السيارة الأولى جاهزة للاستعمال عند الطلب، و أن B هو حدث أن السيارة الثانية جاهزة للاستعمال عند الطلب، و منه الحدث المطلوب هو: $A \cup B$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

و بما أن A و B مستقلان فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$
$$P(A \cup B) = 0.9 + 0.9 - (0.9)(0.9) = 0.99$$

2- ليكن C حدث وجود سيارة واحدة فقط جاهزة للاستعمال عند الطلب، عندئذ:

$$C = (A \cap B') \cup (B \cap A')$$
$$P(C) = P[(A \cap B') \cup (B \cap A')]$$

وبما أن الحدثين $A \cap B'$ و $B \cap A'$ متنافيان فإن:

$$P(C) = P(A \cap B') + P(B \cap A')$$

وبما أن الحدثين A و B مستقلان فإن A' و B مستقلان و A و B' مستقلان وبالتالي:

$$P(C) = P(A)P(B') + P(B)P(A')$$
$$P(C) = (0.90)(0.10) + (0.90)(0.10) = 0.18$$

3- ليكن D حدث أن تكون السيارتان غير جاهزتين للاستعمال عند الطلب، عندئذ:

$$D = A' \cap B'$$
$$P(D) = P(A' \cap B')$$

و بما أن الحدثين A و B مستقلان فإن A' و B' مستقلان، و منه:

$$P(D) = P(A')P(B') = (0.1)(0.1) = 0.01$$

مثال (22):

موظفان في سكرتارية مكتب يقومان بطباعة الرسائل على الحاسوب، فإذا كان الموظف الأول ينسخ 80% من رسائل المكتب، و كانت 90% من رسائله دون أخطاء، و كان الموظف الثاني ينسخ 20% من رسائل المكتب، و كانت 50% من رسائله دون أخطاء، سحبت رسالة عشوائياً من الرسائل المطبوعة في هذا المكتب

والمطلوب:

1- احسب احتمال أن تكون هذه الرسالة دون أخطاء.

2- احسب احتمال أن يكون الموظف الثاني هو الذي طبع هذه الرسالة.

الحل:

لنرمز بـ A للحدث أن الرسالة المسحوبة من طباعة الموظف الأول:

$$P(A) = 0.80$$

لنرمز بـ B للحدث أن الرسالة المسحوبة من طباعة الموظف الثاني:

$$P(B) = 0.20$$

لنرمز بـ C للحدث أن الرسالة المسحوبة دون أخطاء:

$$P(C|A) = 0.90$$

$$P(C|B) = 0.50$$

1- الحدث المطلوب هو:

$$E = C \cap (A \cup B) = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

ولكن: $B \cap C$ و $A \cap C$ حدثان متنافيان لأن التجربة هي سحب رسالة واحدة، وبالتالي:

$$P(E) = P(A \cap C) + P(B \cap C)$$
$$P(E) = P(A)P(C|A) + P(B)P(C|B)$$
$$P(E) = 0.80(0.90) + 0.20(0.50) = 0.82$$

2- الحدث المطلوب هو $B|C$

$$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(B)P(C|B)}{P(C)}$$
$$P(B|C) = \frac{(0.20)(0.50)}{0.80} = 0.121951$$

6- الاحتمال الكلي

كثيراً ما نلجأ عند حساب احتمال وقوع حدث معين إلى تجزئته إلى عدد من الأحداث المتنافية، وذلك لتسهيل عمليات حساب الاحتمالات. وقبل تعريف الاحتمال الكلي لنتعرف على تجزئة فضاء العينة S.

تكون الأحداث : $H_1, H_2, \ldots, H_n$ من فضاء العينة S تجزئة له إذا تحققت الشروط التالية:

1- $\forall\, i = 1,2,\ldots,n : \quad P(H_i) > 0$

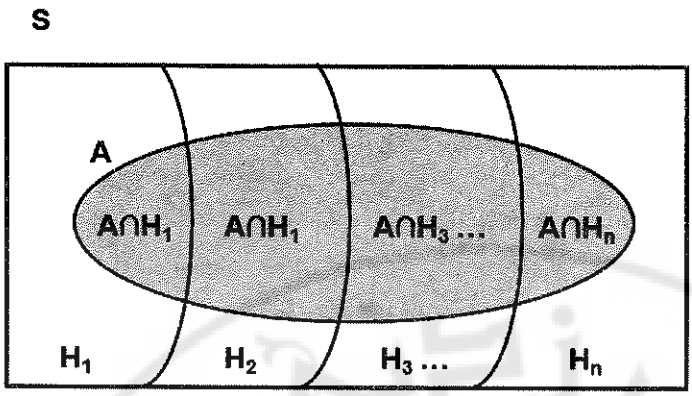
2- $H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n = S$

3- $\forall\, i,j = 1,2,\ldots,n \quad , \quad i \neq j \quad : \quad H_i \cap H_j = \emptyset$

ويعطى قانون الاحتمال الكلي كما يلي:

إذا كانت الأحداث : $H_1, H_2, \ldots, H_n$ تجزئة لفضاء العينة S، وكان A من S (انظر الشكل (6-1)) فإن:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)$$



الشكل (6-1) يمثل تجزئة فضاء العينة S

مثال (23):

يحوي كيس أربع كرات بيضاء وثلاث كرات سوداء، ويحوي كيس أخر ثلاث كرات بيضاء وخمس كرات سوداء. اختيرت كرة عشوائية من الكيس الأول ووضعت في الكيس الثاني ثم سحبت بعد ذلك كرة من الكيس الثاني.

والمطلوب:

ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الكيس الثاني سوداء؟

الحل:

لنرمز بالرمز B للحدث الدال على سحب كرة بيضاء من الكيس الأول.

والرمز C للحدث الدال على سحب كرة سوداء من الكيس الأول.

والرمز A للحدث الدال على سحب كرة سوداء من الكيس الثاني.

وبملاحظة أن B و C يشكلان تجزئة لفضاء العينة S في تجربة سحب كرة من الكيس الأول، أي:

$B \cap C = \emptyset \ , \quad B \cup C = S \ , \quad P(B) > 0 \ , \quad P(C) > 0$

$P(B) = 4/7$

$P(C) = 3/7$

$P(A|B) = 5/9$

$P(A|C) = 6/9$

فحسب قانون الاحتمال الكلي:

$$P(A) = p(B)P(A|B) + p(C)P(A|C)$$
$$= 4/7 \times 5/9 \ + 3/7 \times 6/95 = 0.60317$$

7- مبرهنة بايز

إذا جزأنا فضاء العينة S إلى أحداث متنافية مثنى مثنى $A_1, A_2, \ldots, A_n$، عندئذ من أجل أي حدث A من S يكون لدينا القانون التالي:

$$P(A_k|A) = \frac{P(A_k)P(A|A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(A|A_j)} \quad ; \ k = 1,2, \ldots, n$$

يسمى هذا القانون قانون بايز (Bayes' Rule) أو احتمال السبب، وذلك لأن الحدث A لا يقع إلا إذا وقع أحد الأحداث المسببة في حدوثه وهي: $A_1, A_2, \ldots, A_n$. واتحاد تلك الأحداث يشكل فضاء العينة، وواحد من تلك الأحداث يجب أن يقع، فعند وقوع الحدث A يمكننا التفتيش عن المسببات في وقوعه واحتمال كل منها.

مثال (24):

بفرض أن احتمال تعرّض سيارة لحادث إذا كانت مسرعة 0.15، بينما احتمال تعرضها لحادث إذا لم تكن مسرعة 0.03

كما أن احتمال أن يقود سعيد سيارته بسرعة 0.20.

والمطلوب:

1- إذا قاد سعيد سيارته ذات يوم فما احتمال أن يتعرض لحادث؟

2- إذا علمنا أنه قد وقع حادث لسعيد فما احتمال أن يكون نتيجة للسرعة؟

الحل:

لنرمز بـ B للحدث أن سعيد يقود سيارته مسرعاً:

$$P(B) = 0.20$$

لنرمز بـ C للحدث أن سعيد لا يقود سيارته مسرعاً:

$$P(C) = 0.80$$

لنرمز بـ A للحدث الدال على أن سعيداً قد وقع له حادث:

$$P(A|C) = 0.03$$
$$P(A|B) = 0.15$$

1- بملاحظة أن C و B يشكلان تجزئة لفضاء العينة S لأن:

$$B \cap C = \emptyset \ , \qquad B \cup C = S \ , \ \ P(B), P(C) > 0$$

بتطبيق قانون الاحتمال الكلي يكون احتمال أن يتعرض سعيد لحادث إذا قاد سيارته هو:

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(C)P(A|C)$$
$$P(A) = (0.20)(0.15) + (0.80)(0.03)$$
$$P(A) = 0.054$$

2- بتطبيق قانون بايز يكون احتمال أن يكون الحادث الذي تعرض له سعيد نتيجة السرعة هو:

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \frac{0.20 \times 0.15}{0.054} = 0.555556$$

مثال (25):

يعتمد مصنع ما على أربعة خطوط إنتاج هي على الترتيب: A_1, A_2, A_3, A_4 ، تنتج:

$20\%, 30\%, 40\%, 10\%$ على الترتيب من الإنتاج الكلي للمصنع. تم عشوائياً اختيار وحدة من انتاج المصنع فتبين أنها معيبة

والمطلوب:

أوجد احتمال أن تكون من إنتاج خط الإنتاج A_3؟

الحل:

ليكن D حدث إنتاج وحدة معيبة، عندئذ تبعاً للمعطيات المفروضة يتم تحديد الاحتمالات الشرطية التالية:

$$P(D|A_1) = 0.05 \quad , \quad P(D|A_2) = 0.07$$
$$P(D|A_3) = 0.06 \quad , \quad P(D|A_4) = 0.09$$

وحيث أن المطلوب: $P(A_3|D) = ?$

فإنه يتوجب الحصول على احتمال إنتاج وحدة معيبة $P(D)$ ، وبملاحظة أن A_1 و A_2 و A_3 و A_4 و... تشكل تجزئة للفضاء العينة S لأن:

$$A_i \cap A_j = \emptyset \ , \quad i,j = 1,2,3,4 \ , \quad i \neq j$$
$$A_i \cap A_j = S \ , \quad i,j = 1,2,3,4 \ , \quad i \neq j$$
$$P(A_1), P(A_2), P(A_3), P(A_4) > 0$$

فإنه بتطبيق قانون الاحتمال الكلي نجد:

$$P(D) = P(A_1)P(D|A_1) + P(A_2)P(D|A_2) + P(A_3)P(D|A_3) + P(A_4)P(D|A_4)$$
$$P(D) = 0.20 \times 0.05 + 0.30 \times 0.07 \times 0.40 \times 0.06 + 0.10 \times 0.09$$
$$P(D) = 0.01 + 0.021 + 0.024 + 0.009 = 0.064$$

وعليه يمكن إيجاد الاحتمال المطلوب:

$$P(A_3|D) = \frac{P(A_3)P(D|A_3)}{\sum_{i=1}^{4} P(A_i)P(D|A_i)} = \frac{0.024}{0.064} = 0.375$$

مثال (26):

عند الاصطفاف يهرع ثلاثون طالباً من صف معين للانتظام بصف أحادي، فإذا كان أحمد و حسن طالبين من هذا الصف.

والمطلوب:

1- ما احتمال أن يكونا متجاورين؟

2- إذا علمت أنهما متجاوران، فما هو احتمال أن يكون حسن في آخر الصف؟

الحل:

لنرمز بـ A_1 للحدث أن حسن يقف في أول الصف:

$$P(A_1) = \frac{1}{30}$$

لنرمز بـ A_2 للحدث أن حسن يقف في آخر الصف:

$$P(A_2) = \frac{1}{30}$$

لنرمز بـ A_3 للحدث أن حسن لا يقف في أول الصف و لا في آخر الصف:

$$P(A_2) = \frac{28}{30}$$

1- لنرمز بـ A للحدث الدال على أن أحمد و حسن متجاوران، عندئذ بملاحظة أن: A_1 و A_2 و A_3 تشكل تجزئة للفضاء العينة S لأن:

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = \emptyset$$
$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = S$$
$$P(A_1), P(A_2), P(A_3) > 0$$

فإنه بتطبيق قانون الاحتمال الكلي نجد:

$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3)$$
$$P(A) = \frac{1}{30} \times \frac{1}{29} + \frac{1}{30} \times \frac{1}{29} + \frac{28}{30} \times \frac{2}{29} = \frac{1}{15}$$

2- بتطبيق قانون بايز يكون احتمال أن يكون حسن في آخر الصف، علماً أن أحمد و حسن متجاوران :

$$P(A_2|A) = \frac{P(A_2)P(A|A_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{30} \times \frac{1}{29}}{\frac{1}{15}} = \frac{1}{58}$$

تمارين

السؤال الأول:

في تجربة إلقاء حجر نرد متزن لمرة واحدة فقط.

والمطلوب:

1- أوجد فضاء العينة S.

2- ما احتمال ظهور عدد زوجي في الرمية الثانية؟

السؤال الثاني:

ليكن لدينا فضاء العينة S:

$$S = \{1,3,5,7,9,11,13,15,17\}$$

ولتكن لدينا الأحداث التالية:

$$A = \{5,9,13,17\}, \qquad B = \{3,5,7,15,17\}, \qquad C = \{1,3,7\}$$

والمطلوب، أوجد ما يلي:

1- A' 2- $A \cup C$ 3- $A \cap C$

4- $A' \cup B$ 5- $A' \cup B'$ 6- $A \cap B \cap C$

7- $A \cup B \cup C$

السؤال الثالث:

بكم طريقة مختلفة يمكن لخمس كرات ملونة أن ترتب في نسق واحد؟

السؤال الرابع:

بكم طريقة يستطيع أن يجلس 5 رجال و4 نساء في نسق واحد بحيث تشغل النساء الأماكن الزوجية؟

السؤال الخامس:

بكم طريقة نستطيع اختيار لجنة مؤلفة من 5 أشخاص من بين 9 أشخاص؟

السؤال السادس:

احسب ما يلي: C_4^4 , C_5^6 , C_4^7

السؤال السابع:

احسب ما يلي:

$$P_2^4 \quad , P_5^7 \quad , P_3^{10}$$

السؤال الثامن:

لدينا صندوق يحتوي على 8 كرات حمراء، و3 كرات بيضاء، و9 كرات زرقاء. سحبت 3 كرات عشوائية بدون إعادة.

والمطلوب:

1- ما احتمال أن تكون الكرات المسحوبة من الصندوق كلها حمراء؟

2- ما احتمال أن تكون الكرات المسحوبة من الصندوق كلها بيضاء؟

3- ما احتمال أن تكون الكرات المسحوبة اثنتان حمراوان وواحدة بيضاء؟

4- ما احتمال أن تكون الكرات المسحوبة على الأقل واحدة بيضاء؟

5- ما احتمال أن تكون الكرات المسحوبة من الصندوق واحدة من كل لون؟

6- ما احتمال أن تكون الكرات مسحوبة على الترتيب حمراء، بيضاء، ثم زرقاء؟

السؤال التاسع:

كيس يحتوي على 3 كرات بيضاء و 6 كرات حمراء و3 كرات سوداء من حجم واحد سحبت 3 كرات عشوائياً وبدون إعادة.

والمطلوب :

1- ما احتمال أنها ستكون من لون واحد؟

2- ما احتمال أن تكون الكرات المسحوبة اثنتان سوداوان وواحدة بيضاء ؟

3- ما احتمال أن تكون الكرات المسحوبة اثنتان حمراوان وواحدة بيضاء؟

4- ما احتمال أن تكون الكرات المسحوبة واحدة بيضاء، واحدة حمراء، وواحدة سوداء؟

5- ما احتمال أن تكون الكرات المسحوبة على الأقل واحدة سوداء؟

6- ما احتمال أن تكون الكرات مسحوبة على الترتيب بيضاء، حمراء، ثم سوداء؟

7- ما احتمال عدم ظهور كرات حمراء؟

8- ما احتمال عدم ظهور كرة واحدة حمراء؟

السؤال العاشر:

لتكن التجربة هي اختيار عائله لديها أربعة أطفال، وتسجيلهم حسب الجنس وتسلسل الولادة.

والمطلوب:

1- اكتب فضاء العينة لهذه التجربة،

2- احسب الاحتمالات التالية:

1. عند العائلة بنت واحدة؟
2. عند العائلة بنتان؟
3. عند العائلة أكثر من بنتين؟
4. عند العائلة 3 بنات على الأكثر؟
5. عند العائلة بنت واحدة على الأقل؟

السؤال الحادي عشر:

سحبت ورقة من مجموعة أوراق اللعب (52 ورقة)، ثم أعيدت وسحبت ورقة ثانية.

والمطلوب:

1- ما احتمال أن تكون الورقة الثانية من لون الورقة الأولى نفسها؟

2- ما احتمال أن تكون الورقة الثانية ليست من لون الورقة الأولى نفسها؟

3- ما احتمال أن تحمل كل من الورقتين العدد نفسه؟

4- ما احتمال أن تحمل كل من الورقتين الصورة نفسها؟

5- ما احتمال أن تحمل كل من الورقتين العدد نفسه أو الصورة نفسها؟

6- ما احتمال أن لا تحمل كل من الورقتين الصورة نفسها؟

السؤال الثاني عشر:

سحبت ورقتان من مجموعة أوراق اللعب (52 ورقة)، بحيث تعاد الورقة الأولى قبل سحب الثانية.

والمطلوب:

1- ما احتمال أن تكون الورقتان المسحوبتان بلون الأسود؟

2- ما احتمال أن تكون الورقتان المسحوبتان من شكل معين (ديناري)؟

3- ما احتمال أن تكون الورقتان المسحوبتان من الشكل نفسه؟

4- ما احتمال أن تكون الورقتان المسحوبتان من شكلين مختلفين؟

السؤال الثالث عشر:

إذا كانت نسبة المعيب في الإنتاج تمثل 10% سحبت عينة عشوائية مكونة من 5 وحدات.

والمطلوب:

1- ما احتمال أن لا يوجد في العينة وحدة معيبة؟

2- ما احتمال أن توجد في العينة وحدة معيبة فقط؟

3- ما احتمال أن توجد في العينة وحدة معيبة على الأكثر؟

4- ما احتمال أن توجد في العينة وحدتان معيبتان على الأقل؟

الفصل السابع

المتغيرات العشوائية وتوزيعاتها

1- المتغير العشوائي

عرضنا في الفصل السابق بعض مفاهيم الاحتمالات والتجارب العشوائية. ولكن أحياناً نحتاج إلى التعامل مع قيم عددية مرتبطة بنقاط العينة للتجربة العشوائية.

إذ أن نقاط العينة أو النتائج الممكنة للتجربة العشوائية تكون في بعض الأحيان عبارة عن صفات أو مسميات يصعب التعامل معها رياضياً، وفي هذه الحالة يجب تحويل هذه القيم الوصفية إلى قيم عددية حقيقية يطلق عليها قيم المتغير العشوائي (Random Variable).

تستخدم المتغيرات العشوائية للتعبير عن نتائج التجربة العشوائية وعن أحداث فضاء العينة بقيم عددية بدلاً من مسميات أو صفات.

فمثلاً: قد نهتم فقط بعدد الصورالظاهرة على الوجه العلوي عند رمي قطعة نقود عشر مرات متتالية بغض النظر عن التفصيلات الأخرى. وبالتالي يمثل عدد مرات ظهور الصورة متغيراً عشوائياً تتغير قيمته بتغير نتيجة التجربة العشوائية.

مثال (1):

في تجربة إلقاء قطعة نقود متزنة مرتين متتاليتين يكون فضاء العينة S كما يلي:

$$S = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T\}$$

فإذا أردنا معرفة عدد مرات ظهور الصورة عند إلقاء قطعة النقود، نكون قد عرفنا الدالة X كما يلي:

$$X : S \to R$$

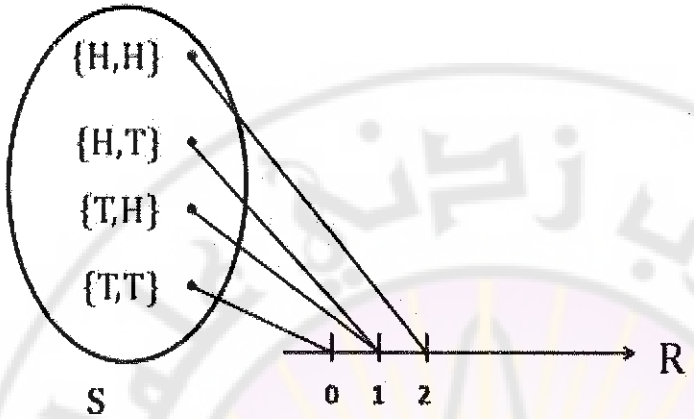
حيث:

$$X\big((H,H)\big) = 2$$
$$X\big((H,T)\big) = 1$$
$$X\big((T,H)\big) = 1$$
$$X\big((T,T)\big) = 0$$

وبالتالي تدعى الدالة السابقة بالمتغير العشوائي، كما تدعى المجموعة $R(X)$:

$$R(X) = \{0,1,2\}$$

مجموعة قيم المتغير العشوائي X ، والشكل (7−1) يبين دالة المتغير العشوائي:



الشكل (7−1) دالة المتغير العشوائي

ويكون لدينا الدالة العكسية لـ X كما يلي:

$$X^{-1}(0) = \{(T,T)\}$$
$$X^{-1}(1) = \{(H,T),(T,H)\}$$
$$X^{-1}(2) = \{(H,H)\}$$

أي أن الصور العكسية هي أحداث من فضاء العينة S. فإذا أردنا إيجاد الاحتمال المقابل لكل قيمة من قيم المتغير العشوائي نجد:

$$P[X = 0] = \frac{1}{4}$$
$$P[X = 1] = \frac{2}{4}$$
$$P[X = 2] = \frac{1}{4}$$

مما سبق يُعرّف المتغير العشوائي بأنه دالة منطلقها فضاء العينة S، ومستقرها مجموعة الأعداد الحقيقية R، بحيث تكون الصورة العكسية لأي مجال من R حدثاً من فضاء العينة S.

عادة نرمز للمتغير العشوائي بحرف لاتيني كبير مثل X أو Y أوZ أو..الخ، ونرمز لإحدى قيم هذه الدالة بحروف صغيرة مثل x أو y أو z أو..الخ.

2-أنواع المتغير العشوائي

تنقسم المتغيرات العشوائية إلى نوعين، وهما:

1- متغيرات عشوائية منفصلة أو متقطعة (Discrete RandomVariables).

2- متغيرات عشوائية مستمرة (Continuous Random Variables).

2-1 المتغير العشوائي المنفصل (المتقطع)

نقول عن المتغير العشوائي X أنه منفصل إذا كانت مجموعة قيمه منتهية أو غير منتهية ولكن قابلة للعدّ. أي أن مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي المنفصل تأخذ إحدى الحالتين التاليتين:

$$X(S) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

أو

$$X(S) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

ومن الأمثلة على المتغيرات العشوائية المنفصلة:

- عدد الأهداف المسجلة لفريق رياضي خلال الدوري العام.
- عدد السيارات المباعة في الشهر لإحدى شركات السيارات.
- عدد الذكور في أسرة مكونة من أربعة أولاد.

بشكل عام المتغير العشوائي المنفصل مجموعة قيمه قابلة للعد.

2-2 المتغير العشوائي المستمر

نقول عن المتغير العشوائي X إنه مستمر إذا شكلت مجموعة قيمه مجالاً مستمراً محدوداً أو غير محدود.

ومن الأمثلة على المتغيرات العشوائية المستمرة:

- طول الشخص.
- وزن الشخص.

- كمية الألبان التي تنتجها البقرة في اليوم باللتر.
- نسبة تركيز مركب ما في محلول كيميائي.
- درجة حرارة تفاعل كيميائي معين.
- المسافة المقطوعة لمركبة خلال وحدة زمن.
- الفترة بين الإصابة بمرض عضال والوفاة.
- كمية هطول الأمطار فوق مدينة دمشق.

إن جميع الأمثلة السابقة هي متغيرات عشوائية مستمرة لأنه يمكن تحديد مجموعة قيمها الممكنة بمجالات مستمرة من مجموعة الأعداد الحقيقية.

3- المتغيرات العشوائية المنفصلة وتوزيعاتها الاحتمالية

سوف نستعرض المتغيرات العشوائية المنفصلة وتوزيعاتها الاحتمالية (Probability Distribution) لأهميتها في التطبيقات العملية.

3-1 دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتقطع

إذا كان X متغيراً عشوائياً منفصلاً مجموعة القيم الممكنة له، هي:

$$X(S) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

أو

$$X(S) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

فإن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X (Probability Mass) ويرمز لها بالرمز $f(x)$ وتعرّف كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} P[X = x] & ; \quad x \in X(S) \\ 0 & ; \quad x \notin X(S) \end{cases}$$

كما أنها تحقق الشروط التالية:

$$0 \le f(x) \le 1 \quad -1$$

$$\sum_{\forall x} f(x) = 1 \quad -2$$

$$P[X \in A] = \sum_{x \in A} f(x) = \sum_{x \in A} P[X = x];\ \forall A \subseteq R \quad -3$$

ويدعى الجدول المكون من قيم X واحتمالاتها المقابلة "جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل X"، والذي يعطى بالجدول (7−1) التالي:

x	x_1	x_2	……	x_n
$f(x_i)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	……	$f(x_n)$

الجدول(7−1) جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصلX

مثال (2):

في تجربة إلقاء حجري نرد، ليكن X متغيراً عشوائياً يدل على مجموع الوجهين الظاهرين.

والمطلوب:

1− تحديد قيم المتغير العشوائي.

2− إيجاد الاحتمال المقابل لكل قيمة من قيم المتغير العشوائي X.

3− كتابة جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X

4− ارسم المدرج الاحتمالي الموافق لجدول التوزيع الاحتمالي

5− تحقق من خواص دالة الكثافة.

الحل:

1− إن قيم المتغير العشوائي X هي:

$$X(S) = \{2, 3, , 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

2− إيجاد الاحتمال المقابل لكل قيمة من قيم المتغير العشوائي X:

$$P[X = 2] = \frac{1}{36}$$

$$P[X = 3] = \frac{2}{36}$$

$$P[X = 4] = \frac{3}{36}$$

$$P[X = 5] = \frac{4}{36}$$

$$P[X = 6] = \frac{5}{36}$$

$$P[X = 7] = \frac{6}{36}$$

$$P[X = 8] = \frac{5}{36}$$

$$P[X = 9] = \frac{4}{36}$$

$$P[X = 10] = \frac{3}{36}$$

$$P[X = 11] = \frac{2}{36}$$

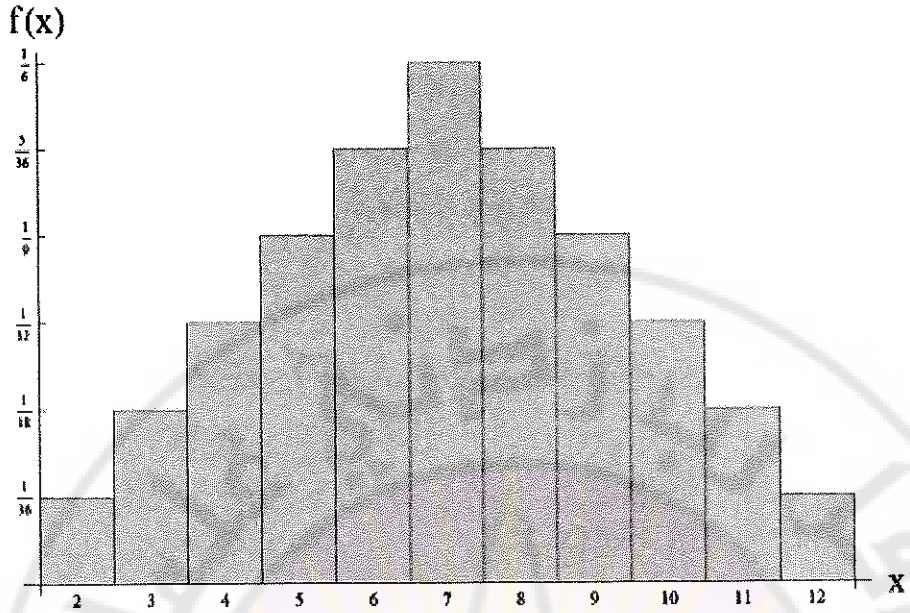
$$P[X = 12] = \frac{1}{36}$$

3- جدول التوزيع الاحتمالي هو:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

4- المدرج الاحتمالي الموافق لجدول التوزيع الاحتمالي:

يوضح الشكل(7-2) المدرج الاحتمالي للجدول التوزيع الاحتمالي السابق.



الشكل(7-2) المدرج الاحتمالي لجدول التوزيع الاحتمالي في المثال(3)

5- نلاحظ من جدول التوزيع الاحتمالي أن جميع قيم $f(x)$ موجبة، كما أن:

$$\sum_{i=1}^{i=11} f(x_i) = \frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{5}{36}+\frac{4}{36}+\frac{3}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36} = 1$$

3-2 دالة التوزيع الاحتمالي

ليس الاهتمام فقط باحتمال أخذ المتغير العشوائي لقيمة واحدة من القيم الممكنة. إنما يكون الاهتمام أحياناً وفي بعض التطبيقات العملية بأخذ المتغير العشوائي المنفصل X لقيمة أقل من أو تساوى قيمة ما من قيمة الممكنة.

وندعو الدالة التي تمثل تلك القيم بدالة التوزيع الاحتمالي المتجمع. وتعرّف كما يلي:

دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل X هي الدالة:

$$F: R \rightarrow R$$

معرفة كما يلي:

$$F(x) = P[X \le x]$$

أي أنها الاحتمال بأن X أقل أو تساوي x .

ومن أجل المتغير العشوائي المنفصل X و الذي دالة كثافته هي f(x) يكون:

$$\forall x \in R: F(x) = P[X \le x] = \sum_{x_i \le x} f(x_i)$$

عندئذ تأخذ دالة التوزيع الاحتمالي المتجمع للمتغير العشوائي X الشكل التالي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < x_1 \\ f(x_1) & x_1 \le x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2) & x_2 \le x < x_3 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) & x_n \le x < +\infty \end{cases}$$

خصائص دالة التوزيع الاحتمالي المتجمع:

1- $0 \le F(x) \le 1$

2- $F(x)$ دالة متزايدة عند كل نقطة x من R

3- $F(-\infty) = 0$ و $F(+\infty) = 1$

4- $P[a < x \le b] = F(b) - F(a)$ و ذلك من أجل أي عددين حقيقيين a و b حيث $a < b$

3-3 التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المنفصل

إذا كان X متغيراً عشوائياً منفصلاً مجموعة القيم الممكنة له. هي:

$$X(S) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

أو

$$X(S) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

ودالة كثافته الاحتمالية هي f(x)، فإنه يعرّف التوقع (أو القيمة المتوقعة أو القيمة المتوسطة) للمتغير العشوائي X، والذي يرمز له بالرمز E(X) أو بالرمز μ_X

كما يلي:

$$\mu_X = E(X) = \sum_{x \in X(S)} x\, f(x)$$

$$\mu_X = E(X) = \sum_{x \in X(S)} x\, P[X = x]$$

$$\mu_X = E(X) = x_1\, f(x_1) + x_2\, f(x_2) + \cdots + x_n\, f(x_n)$$

وللتوقع الرياضي للمتغير العشوائي X خواص، وهي:

$$E(a) = a \quad -1$$

$$E(X \mp b) = E(X) \mp b \quad -2$$

$$E(a\,X) = aE(X) \quad -3$$

$$aE(X \mp b) = aE(X) \mp b \quad -4$$

حيث a و b ثوابت عددية.

نتيجة:

ليكن X متغيراً عشوائياً منفصلاً، ولتكن G(X) دالة حقيقية في المتغير العشوائي X. يُحسب توقع الدالة G(X) كما يلي:

$$\mu_{G(X)} = E[G(X)] = \sum_{x \in X(S)} G(x)\, f(x)$$

$$\mu_{G(X)} = G(x_1)\, f(x_1) + G(x_2)\, f(x_2) + .. + G(x_n)\, f(x_n)$$

4-3 تباين المتغير العشوائي المنفصل

إذا كان X متغيراً عشوائياً توقعه μ_X، فإن تباين (Variance) المتغير العشوائي X ، والذي يرمز له بالرمز V(X) أو Var(X) أو σ_X^2، يعطى كما يلي:

$$\sigma_X^2 = Var(X) = E[(X - \mu_X)^2]$$

أو

$$\sigma_X^2 = Var(X) = E(X^2) - \mu_X^2$$

ويرمز للانحراف المعياري للمتغير العشوائي X، ويرمز له بالرمز σ_X، ويعطى كما يلي:

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$$

ويحسب تباين متغير عشوائي كما يلي:

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \sum_{x \in X(S)} (X - \mu_X)^2 f_X(x)$$
$$= \sum_{x \in X(S)} (X - \mu_X)^2 P(X = x)$$

ولتباين المتغير العشوائي X خواص، وهي:

1- $Var(a) = 0$

2- $Var(X \mp b) = Var(X)$

3- $Var(aX) = a^2 Var(X)$

4- $Var(aX \mp b) = a^2 Var(X)$

حيث a و b ثوابت عددية.

مثال (3):

في تجربة إلقاء قطعة نقود غير متزنة مرتين متتاليتين بشكل مستقل، لنفرض أن:

$$P(T) = \frac{2}{3} \text{ و } P(H) = \frac{1}{3}$$

ولنعرّف المتغير العشوائي X على أنه عدد الصور الظاهرة في الرميتين.

والمطلوب:

1- كتابة فضاء العينة؟

2- تحديد قيم المتغير العشوائي؟

3- ايجاد الاحتمال المقابل لكل قيمة من قيم المتغير العشوائي X؟

4- كتابة جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X؟

5- ارسم المدرج الاحتمالي الموافق لجدول التوزيع الاحتمالي؟

6- باستخدام الطلب السابق أوجد الاحتمالات التالية:

$P[0 < X < 2], \quad P[X \leq 1]$
$P[X \geq 5], \quad P[X < 5], \quad P[X \geq 2]$

7- أوجد دالة التوزيع الاحتمالي $F(x)$؟

8- ارسم المخطط البياني لدالة الكثافة الاحتمالية؟

9- أوجد التوقع الرياضي؟

10- أوجد التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X في الحالات التالية:

1. $G(X) = 9X + 2$
2. $G(X) = X^2$

11- أوجد التباين و الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X؟

الحل:

1- إن فضاء العينة S هو:

$$S = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$$

2- إن المتغير العشوائي X يدل على عدد الصور الظاهرة في الرميتين، وبالتالي مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي:

$$X(S) = \{0,1,2\}$$

3- الاحتمال المقابل لكل قيمة من قيم المتغير العشوائي X

$$P[X=0] = P((T,T)) = P(T) \times P(T) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$P((H,T)) = P(H) \times P(T) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$P((T,H)) = P(T) \times P(H) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

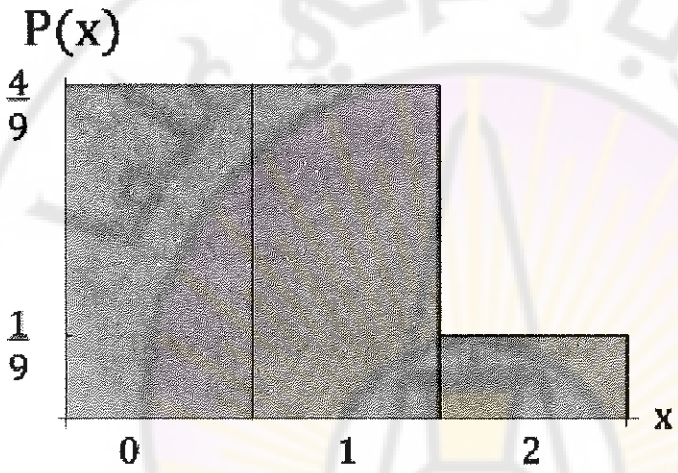
$$P[X=1] = P((H,T)) + P((T,H)) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

$$P[X=2] = P((H,H)) = P(H) \times P(H) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

4- كتابة جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X

x	0	1	2
$f(x_i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

5- المدرج الاحتمالي الموافق لجدول التوزيع الاحتمالي



6- سوف نستفيد من التوزيع الاحتمالي لايجاد الاحتمالات التالية:

$$P[0 < X < 2] = P(X = 1) = \frac{4}{9}$$

$$P[X \leq 1] = P(X = 0) + P(X = 1)$$
$$= \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$$

$$P[X \geq 2] = P(X = 2) = \frac{1}{9}$$

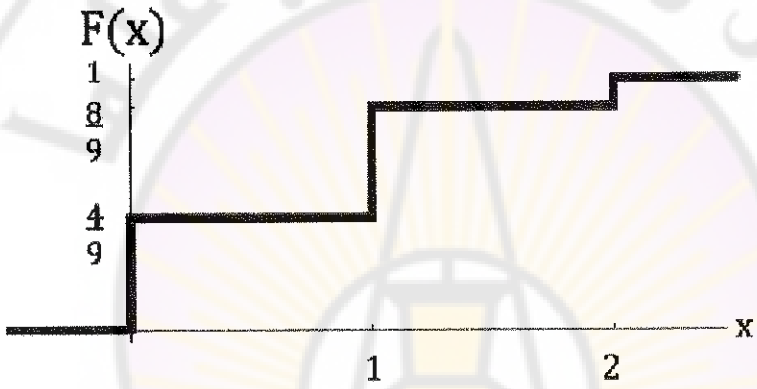
$$P[X \geq 5] = P(\emptyset) = 0$$

$$P[X < 5] = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$
$$= \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

7- دالة التوزيع F(x)

$$F(x)=\begin{cases} 0 & -\infty < x < 0 \\ f(0)=\frac{4}{9} & 0 \le x < 1 \\ f(0)+f(1)=\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=\frac{8}{9} & 1 \le x < 2 \\ f(0)+f(1)+f(2)=1 & 2 \le x < +\infty \end{cases}$$

8- المخطط البياني لدالة الكثافة الاحتمالية:



9- التوقع الرياضي:

$$\mu_X = E(X) = \sum_{i=0}^{2} x\,f(x) = x_0\,f(x_0) + x_1\,f(x_1) + x_2\,f(x_2)$$

$$= 0 \times \frac{4}{9} + 1 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{1}{9} = 0 + \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

10

.1

$$E[G(X)] = E[9X+2] = 9 \times \frac{6}{9} + 2 = 8$$

.2

$$E[G(X)] = E(X^2) = \sum X^2 f(x)$$
$$= x_0^2 f(x_0) + x_1^2 f(x_1) + x_2^2 f(x_2)$$
$$= 0^2 \times \frac{4}{9} + 1^2 \times \frac{4}{9} + 2^2 \times \frac{1}{9} = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$$

11- التباين و الانحراف المعياري

نلخص النتائج في الجدول التالي:

x	$f(x)$	$xf(x)$	$(x-\mu_X)^2$	$(x-\mu_X)^2 f(x)$	x^2	$x^2 f(x)$
0	$\frac{4}{9}$	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{16}{81}$	0	0
1	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{81}$	1	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{16}{81}$	4	$\frac{4}{9}$
المجموع	**1.0**	$E(X) = \frac{2}{3}$		$\frac{36}{81} = \frac{4}{9}$		$E(X^2) = \frac{8}{9}$

يمكن حساب التباين بطريقتين:

الطريقة الأولى:

$$Var(X) = E(X^2) - \mu_X^2$$
$$Var(X) = \sigma_X^2 = \frac{8}{9} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

الطريقة الثانية:

$$Var(X) = \sum_{x \in X(S)} (X - \mu_X)^2 f(x) = \frac{4}{9}$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

مثال (4):

أوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X والذي كثافته الاحتمالية تعطى بالجدول التالي:

x	f(x)
0	0.6
1	0.3
2	0.1

الحل:

1- حساب االتوقع: نلخص الحل في الجدول التالي:

-2

x	**f(x)**	**xf(x)**
0	0.6	0.0
1	0.3	0.3
2	0.1	0.2
المجموع	**1.0**	**E(X) = 0.5**

وبالتالي:

$$\mu_X = E(X) = \sum x\,f(x) = 0.0 + 0.3 + 0.2 = 0.5$$

3- حساب التباين:

x	f(x)	xf(x)	$(x-\mu_x)^2$	$(x-\mu_x)^2 f(x)$	x^2	$x^2 f(x)$
0	0.6	0.0	0.25	0.150	0	0
1	0.3	0.3	0.25	0.075	1	0.3
2	0.1	0.2	2.25	0.225	4	0.4
المجموع	**0.6**	**0.5**		**0.450**		$E(X^2) = 0.7$

وبالتالي التباين هو :

يمكن حساب التباين بطريقتين:

الطريقة الأولى:

$$Var(X) = E(X^2) - \mu_X^2$$
$$Var(X) = \sigma_X^2 = 0.7 - (0.5)^2 = 0.45$$

الطريقة الثانية:

$$Var(X) = \sigma_X^2 = \sum_{x \in X(S)} (X - \mu_X)^2 f(x) = 0.150 + 0.075 + 0.225 = 0.450$$

4- حساب الانحراف المعياري:

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{0.45} = 0.6708$$

4- المتغيرات العشوائية المستمرة وتوزيعاتها الاحتمالية

سندرس دالة الكثافة الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المستمرة (Probability Density Function) لأهميتها في التطبيقات العملية.

4-1 دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر

نقول عن الدالة $f(x)$ المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية R، إنها دالة كثافة احتمالية للمتغير العشوائي المستمر X إذا تحققت الشروط التالية وذلك مهما تكن X من R:

1- $f(x) \geq 0$

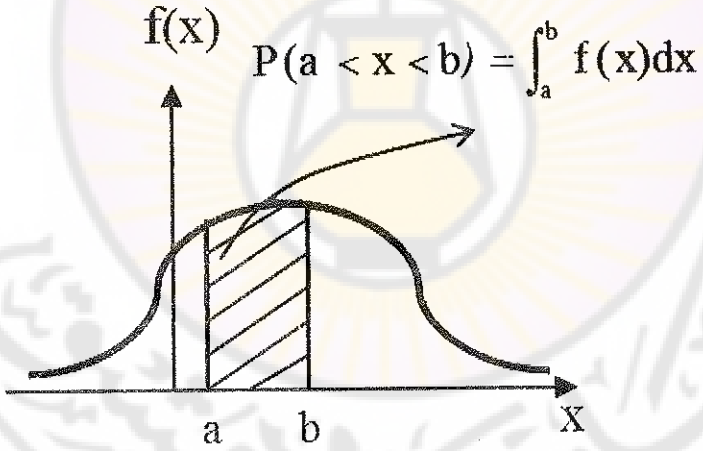
2- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

3- $P[a < X < b] = \int_a^b f(x)dx$

حيث a و b عددين حقيقيين ثابتين و $a < b$.

يدل البند الثالث من التعريف أن احتمال الحدث: $P[a < X < b]$ يمثل المساحة المحصورة بين منحني دالة الكثافة $f(x)$ ومحور الفواصل والمستقيمين $x = a$ و $x = b$.

والشكل (7-3) يمثل ذلك:



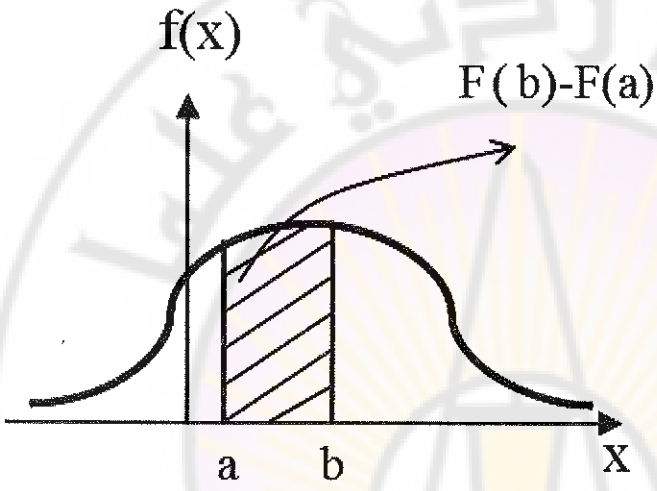
الشكل (7-3) الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي مستمر

ملاحظة

إن احتمال أن تقع X في المجال $[a , b]$ هو:

$$P[b \le X \le a] = \int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$
$$= F(b) - F(a)$$

والشكل (7– 4) يبين ذلك:



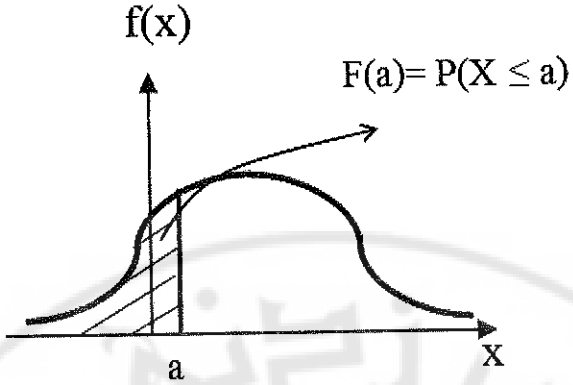
الشكل (7– 4) المساحة التي يشغلها المتغير العشوائي المستمر

2–4 دالة التوزيع الاحتمالي المتجمع للمتغير العشوائي المستمر

دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر X هي: الاحتمال بأن X أقل أو تساوي a أي: $P[X \le a]$ ويرمز لها بالرمز $F(a)$ وتعطى بالعلاقة التالية:

$$F(a) = P[X \le a] = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

والشكل (7– 5) يبين ذلك:



الشكل (7- 5) دالة التوزيع الاحتمالي المتجمع للمتغير العشوائي المستمر

ملاحظات:

- في المتغير العشوائي المستمر:

$$F(a \le x \le b) = P[a \le X \le b] = P[a < X \le b] = P[a \le X < b]$$
$$= P[a < X < b] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

- إذا كانت F دالة توزيع المتغير المستمر، فإن $f(x) = F'(x)$ صحيحة من أجل كل نقطة x من R يكون عندها f مستمرة.
- $F(x) > 0$
- $P[X > x] = 1 - P[X \le x] = F(x)$
- في المتغير العشوائي المستمر، يكون احتمال أن يأخذ المتغير قيمة ثابتة مساوياً الصفر:

$$P[X = Constant] = 0$$

مثال (5):

ليكن الإنفاق الشهري للأسرة بالألف ليرة سورية على المواد الغذائية له دالة كثافة احتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} cx(10-x) & 0 < x < 10 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

والمطلوب:

1- حساب قيمة الثابت c؟

2- ارسم دالة الكثافة الاحتمالية؟

3- احسب احتمال أن إنفاق الأسرة يتراوح ما بين (5 إلى8) آلاف ليرة سورية خلال الشهر.

4- إذا كان لدينا 600 أسرة. فما عدد الأسر التي يقل إنفاقها عن 3 آلاف ليرة سورية خلال الشهر؟

الحل:

1- حساب c: بما أن f(x) دالة كثافة احتمالية ، و بالتالي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + c\int_{0}^{10} (10x - x^2)dx + \int_{10}^{+\infty} 0dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = [0x]_{-\infty}^{0} + c\int_{0}^{10} (10x - x^2)dx + [0x]_{10}^{+\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0 + c\int_{0}^{10} (10x - x^2)dx + 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = c\int_{0}^{10} (10x - x^2)dx$$

$$= c\left[10(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{10} = c\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^{10}$$

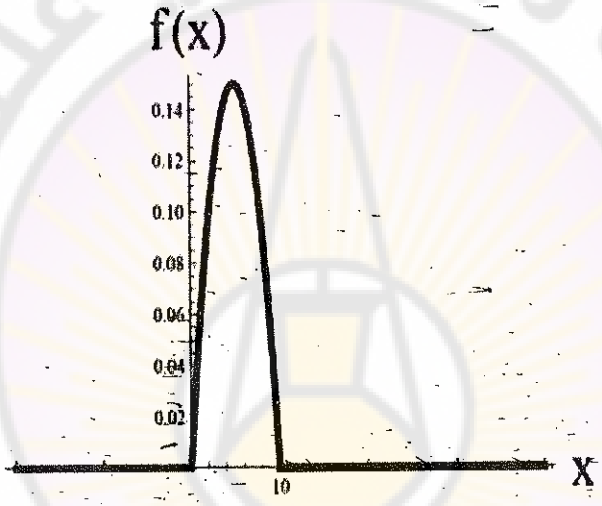
$$= c\left[5(100) - \frac{1000}{3}\right] - 0$$
$$= \frac{500}{3}c = 1$$

$$c = \frac{3}{500} = 0.006$$

2 – إن دالة الكثافة الاحتمالية هي:

$$f(x) = \begin{cases} 0.006\,x(10-x) & 0 < x < 10 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

–3



$$P[5 < X < 8] = 0.006\int_{x=5}^{x=8} x(10-x)dx$$
$$= 0.006\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_5^8$$
$$= 0.006\left[\left[5(8)^2 - \frac{8^3}{3}\right]_5^8 - \left[5(5)^2 - \frac{5^3}{3}\right]_5^8\right]$$
$$= 0.006[149.3333 - 83.3333]$$
$$= 0.006[66]$$
$$= 0.396$$

4- عدد الأسر التي يقل إنفاقها عن 3 آلاف ليرة سورية:

$$600P[X < 3] = 600\int_{0}^{3} 0.006x(10 - x)dx$$

$$= 3.6\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3$$

$$= 3.6\,[45 - 9] - 0$$

$$= 129.6 \approx 130$$

4-3 التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي المستمر

لتكن $f(x)$ دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X، فإن التوقع الرياضي (القيمة المتوسطة) للمتغير العشوائي X هو كما يلي:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

وتباين المتغير العشوائي X يعطى بالشكل التالي:

$$\sigma^2 = E[X - E(X)]^2$$

ويُعطى أيضاً بالطريقة المختزلة بالعلاقة:

$$\sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

حيث:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$$

مثال (6):

في المثال السابق، أوجد التوقع والانحراف المعياري للإنفاق الشهري:

الحل:

1- التوقع:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{0} x0dx + \int_{0}^{10} xf(x)dx + \int_{10}^{+\infty} x0dx$$

$$= 0 + \int_{0}^{10} x\big(0.006x(10-x)\big)\,dx + 0$$

$$= 0.006\int_{0}^{10} (10x^2 - x^3)dx$$

$$= 0.006\left[10\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{10}$$

$$= 0.006\left[\frac{10000}{3} - \frac{10000}{4}\right] - 0$$

$$= 60\left[\frac{1}{12}\right] = 5$$

2- الانحراف المعياري:

$$\sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - 5^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{0} x^2 0dx + \int_{0}^{10} x^2 f(x)dx + \int_{10}^{+\infty} x^2 0dx$$

$$= 0 + 0.006\int_{0}^{10} (10x^3 - x^4)dx + 0$$

$$= 0.006\left[10\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^{10}$$

$$= 0.006\left[\frac{100000}{3} - \frac{100000}{4}\right] - 0 = 600\left[\frac{1}{20}\right] = 30$$

إذاً التباين هو:

$$\sigma^2 = E(X^2) - 5^2 = 30 - 25 = 5$$

وبالتالي الانحراف المعياري هو:

$$\sigma = \sqrt{5} = 2.236$$

مثال (7):

في المثال السابق حول إنفاق الأسرة الشهري بالليرة السورية:

1- أوجد دالة التوزيع المتجمع وارسمها؟

2- استخدم هذه الدالة لحساب احتمال أن إنفاق الأسرة يقل عن 5 آلاف ليرة سورية؟

الحل:

1- لايجاد دالة التوزيع، نحسب قيمها على كل من المجالات:

$x \leq 0$ و $0 < x < 10$ و $x \geq 10$

من أجل $x \leq 0$ ، فإن:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$$

من أجل $0 < x < 10$ فإن:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{x} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0dx + 0.006\int_{0}^{x} x(10-x)dx$$

$$= 0 + 0.006\left[10\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^x$$

$$= 0.006\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right]$$

من أجل $x \geq 10$ فإن:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + 0.006\int_{0}^{10} x(10-x)dx + \int_{10}^{x} 0dx$$

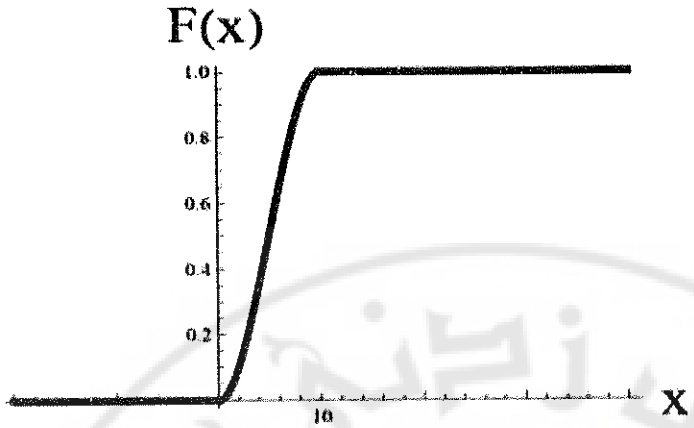
$$= 0 + 0.006[5x^2 - \frac{1}{3}x^3]_0^{10} + 0$$

$$= 0 + 0.006(500 - \frac{1}{3}1000) + 0 = 1$$

ومنه دالة التوزيع الاحتمالي المتجمع:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x \leq 0 \\ 0.006(5x^2 - \frac{x^3}{3}) & 0 < x < 10 \\ 1 & 10 \leq x < +\infty \end{cases}$$

2- رسم دالة التوزيع:



3- حساب الاحتمال $P[X \le 5]$:

$$P[X \le 5] = F(5) \quad = 0.006\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right]$$

$$= 0.006\left[125 - \frac{125}{3}\right] = 0.006\left[\frac{250}{3}\right] = 0.5$$

أي أن 50% من الأسر يقل إنفاقها عن 5 آلاف ليرة سورية.

مثال (8):

لتكن لدينا دالة الكثافة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x \le 1 \\ 2 - x & 1 < x < 2 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

والمطلوب:

1- ارسم دالة الكثافة؟

2- أوجد دالة التوزيع $F(x)$؟

3- ارسم دالة التوزيع؟

4- احسب $P(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{2})$؟

5- احسب $P(X \le \frac{3}{4})$؟

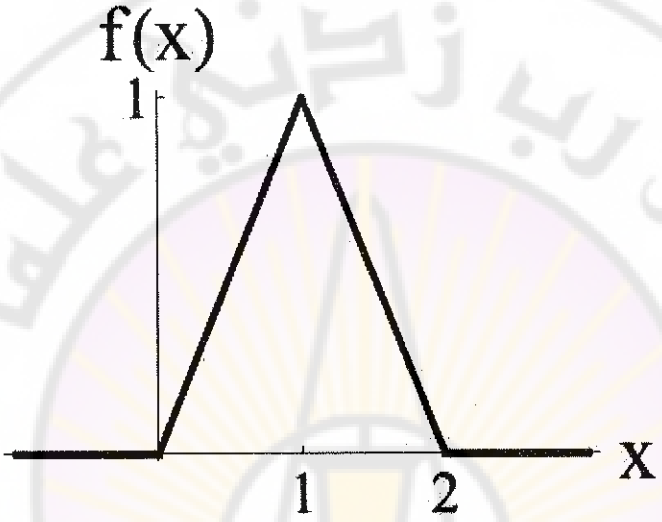
6- احسب $P(X > \frac{5}{2})$؟

7- احسب التوقع ؟

8- احسب الانحراف المعياري؟

الحل:

1- رسم دالة الكثافة:



2- لإيجاد دالة التوزيع، نحسب قيمها على كل من المجالات:

$x \leq 0$ و $0 < x \leq 1$ و $1 < x \leq 2$ و $x \geq 2$

من أجل $x \leq 0$ ، فإن

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$$

من أجل $0 < x \leq 1$ ، فإن

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{x} x\,dx$$

$$F(x) = 0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{2}$$

من أجل $1 < x \le 2$ ، فإن:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} x\,dx + \int_{1}^{x} (2 - x)dx$$

$$F(x) = 0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^x$$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right) - (2 - \frac{1}{2})$$

$$F(x) = -\frac{x^2}{2} - 2x - 1$$

من أجل $2 \le x < +\infty$ ، فإن:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

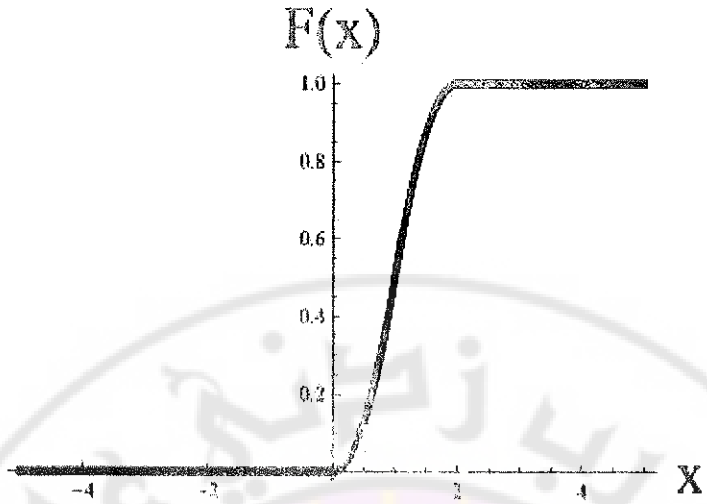
$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} x\,dx + \int_{1}^{2} (2 - x)dx + \int_{2}^{+\infty} 0dx$$

$$F(x) = 0 + \frac{1}{2} + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 + 0$$

$$F(x) = 0 + \frac{1}{2} + (4 - 2) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) + 0 = \frac{1}{2} + 2 - \frac{3}{2} = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x \le 0 \\ \frac{x^2}{2} & 0 < x \le 1 \\ -\frac{x^2}{2} + 2x - 1 & 1 < x < 2 \\ 1 & 2 \le x < +\infty \end{cases}$$

3- رسم دالة التوزيع:



4- حساب $P(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{2})$:

$$P\left(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}\right) - F(\frac{1}{2})$$

$$P\left(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{9}{8} + 3 - 1\right) - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$$

يمكن أيضاً الحل بطريقة أخرى كالتالي:

$$P\left(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} x\,dx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} (2 - x)dx$$

$$P\left(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{2}\right) = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_{1}^{\frac{3}{2}}$$

$$P\left(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + 3 - \frac{9}{8} - 2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

5- حساب $P(X \le \frac{3}{4})$:

$$P\left(X \le \frac{3}{4}\right) = F\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{32}$$

6- حساب $P(X > \frac{5}{2})$:

$$P\left(X > \frac{5}{2}\right) = 1 - P\left(X \le \frac{5}{2}\right) = 1 - F\left(\frac{5}{2}\right) = 1 - 1 = 0$$

7- حساب التوقع:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{1} (x0)\,dx + \int_{0}^{1} x^2\,dx + \int_{1}^{2} x(2-x)dx + \int_{2}^{+\infty} (x0)\,dx$$

$$= 0 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 + 0$$

$$\mu = E(X) = \frac{1}{3} + 4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3} = 1$$

8- حساب الانحراف المعياري:

$$\sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - 1$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{1} (x^2 0)\,dx + \int_{0}^{1} x^3\,dx + \int_{1}^{2} x^2(2-x)dx + \int_{2}^{+\infty} (x^2 0)\,dx$$

$$= 0 + \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_1^2 + 0$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{16}{3} - 4 - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{6}$$

إذاً التباين هو:

$$\sigma^2 = E(X^2) - 1^2 = \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}$$

وبالتالي الانحراف المعياري هو:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

5- العزوم

ليكن X متغيراً عشوائياً، و r عدداً صحيحاً موجباً، عندئذ نعرف العزم(Moment) من المرتبة r للمتغير X حول المبدأ (يدعى العزم الابتدائي من المرتبة r للمتغير العشوائي) بالعلاقة:

$$m_r = E(X^r) = \sum_x x^r f(x)$$

وذلك من أجل X متغيراً منفصلاً

$$m_r = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)dx$$

وذلك من أجل X متغيراً مستمراً

حيث f(x) دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X.

كما نعرف العزم من المرتبة r للمتغير X حول E(X) بالعلاقة:

$$E(X - E(X))^r = \sum_x (x - E(X))^r f(x)$$

وذلك من أجل X متغيراً منفصلاً

$$E(X - E(X))^r = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^r f(x)dx$$

وذلك من أجل X متغيراً مستمراً

مثال (9):

ليكن X متغيراً عشوائياً، جدول توزيعه الاحتمالي:

x	−2	4
f(x)	0.6	0.4

والمطلوب:

أوجد العزوم للمتغير حول المبدأ حتى المرتبة السادسة؟

الحل:

$$m_1 = E(X) = \sum_x x\, f(x) = 0.4$$

$$m_2 = E(X^2) = \sum_x x^2\, f(x) = 8.8$$

$$m_3 = E(X^3) = \sum_x x^3\, f(x) = 20.8$$

$$m_4 = E(X^4) = \sum_x x^4\, f(x) = 112$$

$$m_5 = E(X^5) = \sum_x x^5\, f(x) = 390.4$$

$$m_6 = E(X^6) = \sum_x x^6\, f(x) = 1676.8$$

مثال (10):

ليكن X متغيراً عشوائياً، دالة كثافته:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & 5 \le x \le 10 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

والمطلوب:

أوجد العزوم للمتغير حول المبدأ حتى المرتبة السادسة

الحل:

$$m_1 = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)dx = \frac{1}{5}\int_{5}^{10} x\,dx = 7.5$$

$$m_2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,f(x)dx = \frac{1}{5}\int_{5}^{10} x^2\,dx = 58.33$$

$$m_3 = E(X^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3\,f(x)dx = \frac{1}{5}\int_{5}^{10} x^3\,dx = 468.75$$

$$m_4 = E(X^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4\,f(x)dx = \frac{1}{5}\int_{5}^{10} x^4\,dx = 3875$$

$$m_5 = E(X^5) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^5\,f(x)dx = \frac{1}{5}\int_{5}^{10} x^5\,dx = 32812.5$$

$$m_6 = E(X^6) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^6\,f(x)dx = \frac{1}{5}\int_{5}^{10} x^6\,dx = 283482$$

6- الدوال المولدة للعزوم

تأتي أهمية الدوال المولدة للعزوم من كونها مرتبطة مع دوال التوزيع بعلاقة وحيدة التعيين، أي أنه لكل توزيع احتمالي دالة مولدة للعزوم خاصة به و تميزه عن غيره من التوزيعات.

ليكن X متغيراً عشوائياً، عندئذ نعرف الدالة المولدة لعزوم X بالعلاقة:

$$M_X(t) = E(e^{tx}); \quad t \in R$$

فإذا كان X متغيراً عشوائياً منفصلاً، فإن الدالة المولدة للعزوم تعطى بالعلاقة:

$$M_X(t) = \sum_x e^{tx} f(x)$$

و إذا كان X متغيراً عشوائياً مستمراً، فإن الدالة المولدة للعزوم تعطى بالعلاقة:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx$$

حيث $f(x)$ دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X.

خواص الدالة المولدة للعزوم:

- ليكن X متغيراً عشوائياً، و الدالة المولدة للعزوم له هي $M_X(t)$، عندئذ إذا كان a, b ثابتين فإن:

$$M_{aX+b}(t) = e^{bt}M_X(at)$$

- إذا كانت $M_X(t)$ قابلة للاشتقاق حتى المرتبة n فإن:

$$m_r = \left.\frac{d^r M_X(t)}{dt^r}\right|_{t=0} = M_X^{(r)}(0) \quad ; r = 1,2,..,n$$

- ليكن Y متغيراً عشوائياً، و الدالة المولدة للعزوم له هي $M_Y(t)$، عندئذ إذا كان:

$$M_X(t) = M_Y(t), \qquad \forall\, t \in R$$

فإنه يكون للمتغيرين X, Y التوزيع الاحتمالي نفسه.

- إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين مستقلين، فإن:

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$$

تمارين

السؤال الأول:

في تجربة دولاب الحظ عليه ثلاثة أرقام هي 2 و 3 و4 ، إذا أدرنا الدولاب مرتين بحيث يؤشر في كل مرة على أحد الأرقام الثلاثة. ليكن X تمثل مجموع الرقمين الناتجين.

والمطلوب:

1- أوجد فضاء العينة S؟

2- استنتج التوزيع الاحتمالي؟

السؤال الثاني:

لتكن نسبة مبيعات أحد المراكز التجارية من التفاح الجولاني 60%، بينما نسبة مبيعاته من الأنواع الأخرى للتفاح 40%. اشترى أحد العملاء صندوقين.

والمطلوب:

1- أوجد فضاء العينة S؟

2- ليكن المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الصناديق المشتراة من التفاح الجولاني، أوجد ما يلي:

1. التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X؟
2. ارسم دالة الاحتمال لهذا المتغير؟
3. استنتج التوزيع الاحتمالي المتجمع؟
4. احسب ما يلي:

$$P[X \leq 1.5], \quad P[X = 1.5]$$
$$P[X \leq 1], \quad P[X = 1]$$

5. أوجد قيمة الوسيط والمنوال لعدد الصناديق المشتراة؟
6. أوجد القيمة المتوسطة لعدد الصناديق المشتراة؟
7. احسب التباين لعدد الصناديق المشتراة.

8. احسب الانحراف المعياري لعدد الصناديق المشتراة.

السؤال الثالث:

يبين الجدول التالي التوزيع الاحتمالي لعدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من أحد مساحيق النظافة خلال الشهر X :

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	0.15	0.30	0.25	0.23	0.05	0.02

والمطلوب:

1- حدد نوع المتغير العشوائي X؟

2- احسب الوسيط والمنوال لعدد الوحدات المستهلكة؟

3- احسب التباين لعدد الوحدات المستهلكة؟

4- احسب الانحراف المعياري لعدد الوحدات المستهلكة؟

5- استنتج جدول التوزيع الاحتمالي المتجمع F(x)، ثم أوجد ما يلي:

1. نسبة الأسر التي يقل استهلاكها عن وحدتين؟

2. نسبة الأسر التي يزيد استهلاكها عن 3 وحدات؟

3. إذا كان لدينا 500 أسرة فما عدد الأسر المتوقع أن يكون استهلاكها على الأقل 3 وحدات؟

السؤال الرابع:

في تجربة إلقاء قطعة نقود غير متزنة بحيث:

$$P(H) = 0.4$$

$$P(T) = 0.6$$

ألقيت هذه قطعة ثلاث مرات بشكل مستقل.

ليكن المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد مرات ظهور الصورة في الرميات الثلاثة.

والمطلوب:

1- أوجد دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X ؟

2- أوجد التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X ؟

3- أوجد التباين للمتغير العشوائي X ؟

4- أوجد الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X ؟

5- أوجد الاحتمالات التالية:

1. الحصول على صورتين.
2. الحصول على صورتين على الأقل.
3. الحصول على صورة واحدة على الأكثر.
4. الحصول على ثلاث كتابات؟
5. الحصول على ثلاث صور؟

السؤال الخامس:

يوجد في مصنع 15 عاملاً و 50 مهندساً، سحبت عينة عشوائية مكونة من 3 أفراد.

والمطلوب:

أوجد الاحتمالات التالية:

1- العينة كلها من المهندسين.

2- العينة كلها من العمال.

3- العينة فيها عامل واحد ومهندسان.

4- العينة فيها مهندس واحد وعاملان اثنان.

السؤال السادس:

إذا كان X متغيراً عشوائياً كثافته الاحتمالية:

$$f(x) = \frac{1}{2} \ , \quad 0 \le x \le 2$$

والمطلوب:

أوجد ما يلي:

1- $P[0.5 < X < 1.5]$

2- $P[X > 0.25]$

3- $P[X < 0.75]$

4- $P[X > 3]$

السؤال السابع:

إذا كان X متغيراً عشوائياً كثافته الاحتمالية:

$$f(x) = 2x \ , \quad 0 \le x \le 1$$

والمطلوب:

أوجد ما يلي:

1- التوقع الرياضي $E(X)$ ؟

2- $E(X^2)$ ؟

3- $E(X+1)$ $E((X+1)^2)$ و ؟

السؤال الثامن:

إذا كان لدينا صندوقين، الأول يحتوي على 5 مناديل معيبة و8 مناديل سليمة، والثاني يحتوي على 6 مناديل معيبة و11 منديلاً سليماً. نختار عشوائياً أحد الصندوقين و نسحب منه منديلاً. والمطلوب: ما احتمال أن يكون المنديل المسحوب عشوائياً معيباً؟

التوزيعات الاحتمالية المنفصلة الشهيرة

1- توزيع برنولي

1-1 التجربة الثنائية (تجربة برنولي)

تتصف التجربة الثنائية أو تجربة برنولي (Bernoulli's Trial) بالخواص التالية:

1- تمتلك التجربة الثنائية ناتجين وهما:

1. النجاح: ونرمز له بالرمز S ، كما نرمز لاحتماله بالرمز p.
2. الفشل: ونرمز له بالرمز f، كما نرمز لاحتماله بالرمز q، حيث:

$$p + q = 1$$

2- عند تكرار التجربة الثنائية n مرة، فإن احتمال النجاح p يبقى ثابتاً من تكرار إلى أخر، كذلك احتمال الفشل q، ما يعني أن التكرارات تكون مستقلة عن بعضها البعض.

3- نرمز لعدد النجاحات التي نحصل عليها خلال التكرارات المستقلة والتي عددها n بالرمز: X.

ومن الأمثلة على التجربة الثنائية أو تجربة برنولي ما يلي:

1- إلقاء قطعة نقود: إما الحصول على الصورة أو عدم الحصول عليها.

2- نتيجة الطالب في الاختبار: إما نجاح، أو رسوب.

3- تفاعل كيميائي: إما حدوث التفاعل أو عدم حدوثه.

4- إنتاج مصنع من قطع الغيار: إما القطعة معيبة أو غير معيبة.

5- جنس المولود: إما ذكر أو أنثى.

2-1 توزيع برنولي

إذا أجرينا تجربة برنولية (ثنائية) مرة واحدة فقط أي $n = 1$ فقيمة X إما أن تكون صفراً أو واحداً، و منه:

$$p[X = 1] = p$$

و

$$p[X = 0] = q$$

ويكون جدول التوزيع الاحتمالي على الشكل التالي:

x	0	1
f(x)	q	p

يسمى الجدول السابق: "جدول برنولي". و بالتالي:

نقول إن للمتغير العشوائي X التوزيع البرنولي، ووسيطه p إذا كانت له دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = p^x q^{x-1} \ ; \ x = 0, 1$$

3-1 التوقع الرياضي لمتغير عشوائي له توزيع برنولي

إذا كان X متغيراً عشوائياً له توزيع برنولي ووسيطه P، فإن:

$$E(X) = p$$

4-1 التباين لمتغير عشوائي له توزيع برنولي

إذا كان X متغيراً عشوائياً له توزيع برنولي ووسيطه p، فإن:

$$V(X) = pq$$

5-1 الانحراف المعياري لمتغير عشوائي له توزيع برنولي

إذا كان X متغيراً عشوائياً له توزيع برنولي ووسيطه p ، فإن:

$$\sigma_X = \sqrt{pq}$$

6-1 الدالة المولدة للعزوم للتوزيع البرنولي

إذا كان X متغيراً عشوائياً له توزيع برنولي ووسيطه p ، فإن:

$$M_X(t) = q + pe^t \ ; \ t \in R$$

وبالاشتقاق بالنسبة لـ t نجد:

$$M_X^{(1)}(t) = pe^t \quad ; \ t \in R$$

وأن:

$$M_X^{(2)}(t) = pe^t \quad ; \quad t \in R$$

وبوضع $t = 0$ في عبارة المشتق الأول، وحسب العلاقة:

$$m_r = M_X^{(r)}(0) \quad ; \ r = 1,2,..,n$$

نجد أن:

$$m_1 = E(X) = M_X^{(1)}(0) = p$$

وهو العزم من المرتبة الأولى.

وبوضع $t = 0$ في عبارة المشتق الثاني، وحسب العلاقة:

$$m_r = M_X^{(r)}(0) \quad ; \ r = 1,2,..,n$$

نجد أن:

$$m_2 E(X^2) = M_X^{(2)}(0) = p$$

وهو العزم من المرتبة الثانية.

مثال (1):

ليكن X متغيراً عشوائياً له التوزيع البرنولي، ووسيطه $p = 0.2$. والمطلوب:

1- عين التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X؟

2- عين الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X ؟

3- عين الدالة المولدة للعزوم؟

4- أوجد $P[X = 0]$؟

الحل:

1- التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X:

$$E(X) = p = 0.2$$

2- الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X:

$$q = 1 - p = 1 - 0.2 = 0.8$$
$$\sigma_X = \sqrt{pq} = \sqrt{0.2 \times 0.8} = 0.4$$

3- الدالة المولدة للعزوم:

$$M_X(t) = q + pe^t = 0.8 + 0.2e^t$$

4- $P[X = 0]$:

$$P[X = 0] = 0.8$$

2- التوزيع الثنائي الحداني

إذا كان لدينا تجربة عشوائية ثنائية (برنولية)، وكررنا هذه التجربة بشكل مستقل n مرة، عندئذ سنحصل على متتالية من النتائج تحوي عدداً معيناً من النجاحات والباقي فشل. وإذا كان X المتغير الدال على عدد النجاحات الحاصلة، فإن احتمال أن يأخذ X القيمة k حيث $k \leq n$، أي احتمال الحصول على k نجاحاً من n تكراراً من الشكل:

$$p[X = k] = b(k; n, p) = C(n, k)p^k q^{n-k}$$

حيث أن:

$$k = 0, 1, 2, \dots, n$$
$$0 \leq p \leq 1 ; \quad p + q = 1$$
$$C(n, k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

يدعى المتغير العشوائي X الذي له قانون الكثافة الأخير بالمتغير العشوائي الثنائي الحداني (Binomial Distribution)، وسطاؤه n و p.

إن الكثافة الأخيرة هي كثافة احتمالية فعلية لأن:

$$\sum_{k=0}^{n} b(k; n, p) = \sum_{k=0}^{n} C(n, k)\, p^k q^{n-k}$$
$$= (p + q)^n = (1)^n = 1$$

مثال (2):

إذا كررنا إلقاء حجري النرد 4 مرات متتالية، فما احتمال أن نحصل على المجموع 5؟

1- مرة واحدة؟

2- مرة واحدة على الأكثر؟

3- مرتين على الأقل؟

الحل:

عند إلقاء حجري النرد فإننا نقوم بتجربة برنولية إما الحصول على مجموع 5 أو مجموع لا يساوي 5. وإن احتمال حصولنا على مجموع يساوي 5 هو:

$$P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

فإذا دل X على عدد مرات حصولنا على المجموع 5 عندما نكرر التجربة 4 مرات، فإن X يخضع للتوزيع الثنائي الحداني، وتكون دالة كثافته الاحتمالية:

$$b(k; 4, 1/9) = C(4,k)(1/9)^k(8/9)^{4-k}\ ; k = 0, 1, 2, 3, 4$$

1- احتمال أن نحصل على المجموع 5 مرة واحدة:

$$P[X = 1] = b(1; 4, 1/9) = C(4,1)(1/9)^1(8/9)^{4-1}$$
$$= 0.312148$$

2- احتمال أن نحصل على المجموع 5 مرة واحدة على الأكثر:

$$P[X \le 1] = P[X = 0] + P[X = 1]$$
$$= b(0; 4, 1/9) + b(1; 4, 1/9)$$
$$= 0.624295 + 0.312148$$
$$= 0.93644$$

3- احتمال أن نحصل على المجموع 5 مرتين على الأقل:

$$p[X \ge 2] = 1 - p[X \le 1] = 1 - 0.936443 = 0.06356$$

1-2 التوقع الرياضي لمتغير عشوائي له التوزيع الثنائي الحداني

إذا كان X متغيراً عشوائياً له التوزيع الثنائي الحداني ووسطاؤه n و p، فإن:

$$E(X) = np$$

حيث: n يمثل عدد مرات تكرار التجربة الثنائية.

p يمثل احتمال النجاح.

2-2 تباين متغير عشوائي له التوزيع الثنائي الحداني

إذا كان X متغيراً عشوائياً له التوزيع الثنائي الحداني ووسطاؤه n و p، فإن:

$$V(X) = npq$$

حيث: n يمثل عدد مرات تكرار التجربة الثنائية.

p يمثل احتمال النجاح.

q يمثل احتمال الفشل.

3-2 الانحراف المعياري لمتغير عشوائي له التوزيع الثنائي الحداني

إذا كان X متغيراً عشوائياً له التوزيع الثنائي الحداني ووسطاؤه n و p، فإن:

$$\sigma_X = \sqrt{npq}$$

4-2 الدالة المولدة للعزوم للتوزيع الثنائي الحداني

إذا كان X متغيراً عشوائياً له التوزيع الثنائي الحداني ووسطاؤه n و p، فإن:

$$M_X(t) = (pe^t + q)^n \quad ; \quad t \in R$$

حيث t يمثل متغير الدالة المولدة للعزوم.

وباشتقاق العلاقة السابقة بالنسبة لـ t نجد:

$$M_X^{(1)}(t) = npe^t(pe^t + q)^{n-1} \quad ; \quad t \in R$$

وأن:

$$M_X^{(2)}(t) = n(n-1)p^2e^{2t}(pe^t + q)^{n-2} + n\,pe^t(pe^t + q)^{n-1}$$

وبوضع $t = 0$ في عبارة المشتق الأول، وحسب العلاقة:

$$m_r = M_X^{(r)}(0) \quad ; \; r = 1,2,..,n$$

نجد أن:

$$E(X) = M_X^{(1)}(0) = npe^0(pe^0 + q)^{n-1} = np$$

وهو العزم من المرتبة الأولى.

وبوضع $t = 0$ في عبارة المشتق الثاني، وحسب العلاقة:

$$m_r = M_X^{(r)}(0) \quad ; \quad r = 1,2,..,n$$

نجد أن:

$$m_2 = E(x^2) = M_X^{(2)}(0) = n(n-1)p^2 + np$$

وهو العزم من المرتبة الثانية.

5-2 مبرهنة

إذا كان X متغيراً عشوائياً له التوزيع الثنائي الحداني بوسيطين n و p فإن القيمة الأكثر احتمالاً له هي العدد الصحيح الواقع في المجال:

$$.[np - q\,, (n+1)p]$$

إن القيمة الأكثر احتمالاً تعين قيمة المتحول العشوائي الثنائي الحداني X التي تبلغ عندها دالة الكثافة قيمتها العظمى.

ملاحظة:

بما أنه طول المجال $[np - q,\ (n+1)p]$ يساوي 1 لأن:

$$(n+1)p - np - q = p + q = 1$$

فلا يوجد في المجال المذكور سوى:

1- عدد صحيح واحد إذ كان $(n+1)p$ ليس عدداً صحيحاً.

2- عددين صحيحين فقط وهما طرفا المجال أي: $(n+1)p$ و $np - q$.

مثال (3):

إذا علمنا أن نسبة الشفاء من مرض معين باستخدام نوع معين من العقاقير الطبية هو 0.60، فإذا تناول هذا العقار 5 مصابين بهذا المرض. وإذا عرفنا المتغير العشوائي X، بأنه عدد الذين استجابوا لهذا النوع من العقاقير (حالات الشفاء).

والمطلوب:

1- ما احتمال استجابة ثلاثة مرضى لهذا العقار؟

2- ما احتمال استجابة مريض واحد على الأقل لهذا العقار؟

3- ما احتمال استجابة مريضين على الأكثر لهذا العقار؟

4- أوجد القيمة المتوسطة لعدد حالات الاستجابة؟

5- أوجد الانحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة؟

6- حدد شكل التوزيع؟

الحل:

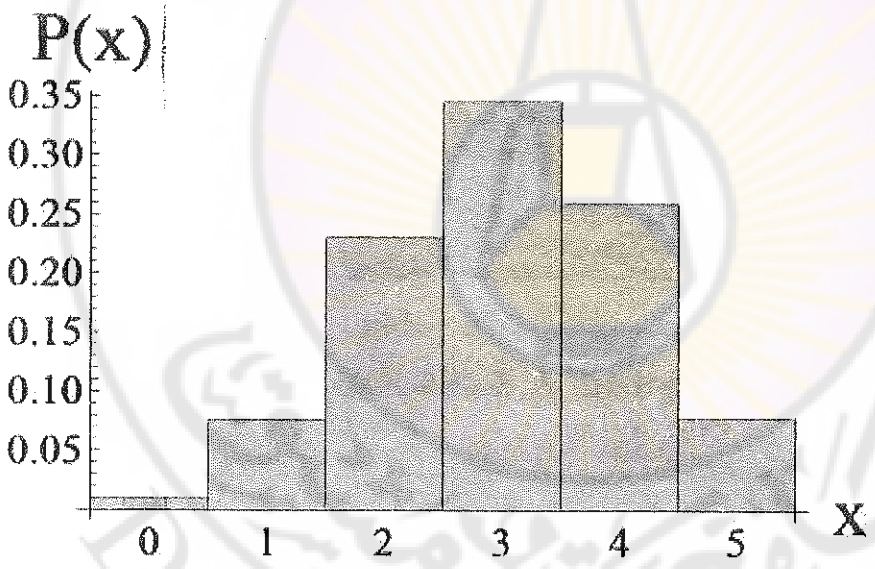
إن المتغير X هو متغير منفصل له التوزيع الثنائي الحداني، حيث:

$$n = 5, \quad p = 0.60 , q = 1 - p = 1 - 0.60 = 0.40$$

وإن دالة الكثافة الاحتمالية هي:

$$b(k; 5, 0.60) = C(5, k)p^k q^{5-k} \quad , k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

ويوضح الشكل التالي المخطط الاحتمالي لدالة الكثافة.



1- احتمال استجابة ثلاثة مرضى لهذا العقار:

$$P[X = 3] = b(3; 5, 0.60) = C(5,3)\, p^3 q^{5-3}$$
$$= C(5,3)(0.60)^3(0.40)^2$$
$$= 0.3456 = 10 \times 0.216 \times 0.16$$

2- احتمال استجابة مريض واحد على الأقل لهذا العقار:

$$P[X \geq 1] = 1 - P[X < 0]$$
$$P[X \geq 1] = 1 - P[X = 0]$$
$$= 1 - b(0; 5,0.60)$$
$$= 1 - C(5,0)p^0q^{5-0}$$
$$= 1 - [1 \times (0.60)^0 \times (0.40)^5]$$
$$= 1 - [1 \times 1 \times 0.01024]$$
$$= 0.98976$$

3- احتمال استجابة مريضين على الأكثر لهذا العقار:

$$P[X \leq 2] = P[X = 2] + P[X = 1] + P[X = 0]$$
$$= b(2; 5,0.60) + b(1; 5,0.60) + b(0; 5,0.60)$$
$$= C(5,2)p^2q^{5-2} + C(5,1)p^1q^{5-1} + C(5,0)p^0q^{5-0}$$
$$= C(5,2)p^2q^3 + C(5,1)p^1q^4 + C(5,0)p^0q^5$$
$$= 0.2304 + 0.0768 + 0.01024$$
$$= 0.31744$$

4- القيمة المتوسطة لعدد حالات الاستجابة = التوقع الرياضي:

$$E(X) = np = 5 \times 0.60 = 3$$

5- الانحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة:

$$\sigma_X = \sqrt{npq} = \sqrt{5 \times 0.60 \times 0.40} = \sqrt{1.2} = 1.095$$

6- شكل التوزيع:

يتحدد شكل التوزيع الثنائي الحداني من خلال احتمال النجاح أي p كما يلي:

- إذا كان $p = 0.5$ فإن التوزيع الثنائي الحداني يكون متماثلاً.
- إذا كان $p < 0.5$ فإن التوزيع الثنائي الحداني يكون موجب الالتواء.
- إذا كان $p > 0.5$ فإن التوزيع الثنائي الحداني يكون سالب الالتواء.

وبما أن $p = 0.6 > 0.5$ فإن توزيع عدد حالات الاستجابة سالب الالتواء.

مثال (4):

احتمال أن يصيب رام الهدف هو 0.7، فإذا صوب نحو الهدف 6 طلقات.

والمطلوب:

1- ما احتمال أن يصيب الهدف بثلاث طلقات؟

2- ما احتمال أن يصيب الهدف بطلقة واحدة على الأقل؟

3- التوقع و الانحراف المعياري؟

4- ما القيمة الأكثر احتمالاً لعدد الطلقات التي تصيب الهدف؟

الحل:

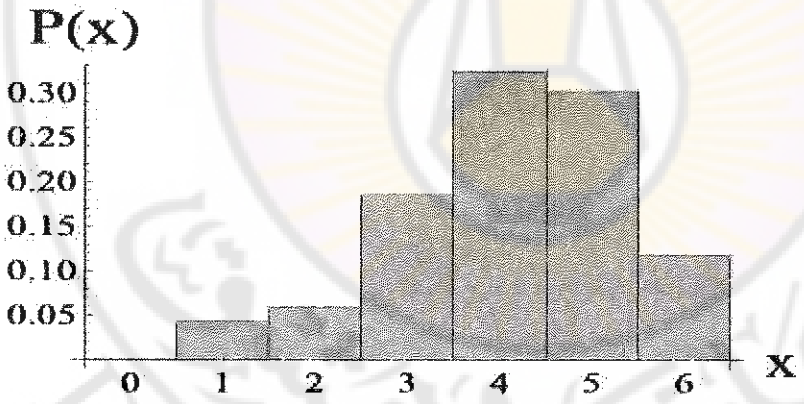
عند التصويب على هدف معين فإننا نقوم بتجربة ثنائية (برنولية) إما إصابة الهدف أو عدم إصابة الهدف. و الإطلاق ست مرات يعني تكرار التجربة بشكل مستقل ست مرات، و يكون احتمال النجاح في كل مرة $p = 0.7$، فإذا دل X على عدد الطلقات التي تصيب الهدف فإن لـ X التوزيع الثنائي الحداني، ويكون:

$$n = 6\,,\quad p = 0.7\,, q = 1 - p = 1 - 0.7 = 0.3$$

وإن دالة الكثافة الاحتمالية هي:

$$b(k; 6{,}0.7) = C(6,k)p^k q^{6-k}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

ويوضح الشكل التالي المدرج الاحتمالي لدالة الكثافة.



1- احتمال اصابة الهدف ثلاث مرات:

$$P[X = 3] = b(3; 6{,}0.7) \quad = C(6{,}3)\, p^3 q^{6-3}$$
$$= C(6{,}3)(0.7)^3(0.3)^3 \quad = 20 \times 0.343 \times 0.027$$
$$= 0.18522$$

2- احتمال أن يصيب الهدف بطلقة واحدة على الأقل:

$$P[X \geq 1] = 1 - P[X < 0]$$
$$P[X \geq 1] = 1 - P[X = 0]$$
$$= 1 - b(0; 6, 0.7)$$
$$= 1 - C(6,0)\, p^0 q^{6-0}$$
$$= 1 - [1 \times (0.7)^0 \times (0.3)^6]$$
$$= 1 - 0.000729 = 0.999271$$

3- التوقع و الانحراف المعياري:

$$E(X) = np = 6 \times 0.7 = 4.2$$

4- الانحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة:

$$\sigma_X = \sqrt{npq} = \sqrt{6 \times 0.7 \times 0.3} = \sqrt{1.26} = 1.12$$

5- القيمة الأكثر احتمالاً لعدد الطلقات هي العدد الصحيح الواقع في المجال:

$$[np - q, (n+1)p] = [6(0.7) - 0.3, (6+1)(0.7)]$$
$$[np - q, (n+1)p] = [3.9, 4.9]$$

الرقم الصحيح الواقع في المجال $[3.9, 4.9]$ هو 4 و بالتالي القيمة الأكثر احتمالاً لعدد الطلقات التي تصيب الهدف هو 4.

مثال (5):

احتمال إصابة صاروخ لطائرة هو 0.7، فكم صاروخ يجب أن نطلق على طائرة حتى تصاب بإحتمال أكبر من 0.8.

الحل:

عند تصويب صاروخ على طائرة، فإننا نقوم بتجربة ثنائية (برنولية) إما إصابة الطائرة أو عدم إصابة الطائرة. فعند تكرار التجربة بشكل مستقل n مرة يكون احتمال النجاح في كل مرة $p = 0.7$، فإذا دل X على عدد الصواريخ التي تصيب الطائرة فإن لـ X التوزيع الثنائي الحدين، ويكون:

$$n = ؟, \quad p = 0.7, q = 1 - p = 1 - 0.7 = 0.3$$

وإن دالة الكثافة الاحتمالية هي:

$$b(k; n, 0.7) = C(n, k) p^k q^{n-k}$$
$$k = 0, 1, \ldots, n$$

نعين n بحيث يكون:

$$P[X \geq 1] > 0.8$$
$$1 - P[X < 1] > 0.8$$
$$P[X < 1] < 0.2$$
$$P[X = 0] < 0.2$$
$$C(n, 0)\ (0.7)^0 (0.3)^{n-0} < 0.2$$
$$\frac{n!}{0!\,(n-0)!}(0.3)^n < 0.2$$
$$(0.3)^n < 0.2$$

نأخذ لوغاريتم الطرفين فنجد:

$$n\ Ln(0.3) < Ln(0.2)$$

نقسم الطرفين على $Ln(0.3)$ و الذي هو مقدار سالب، و بالتالي تتغير جهة المتراجحة:

$$n > \frac{Ln(0.2)}{Ln(0.3)}$$
$$n > 1.33677 \approx 2$$

و بالتالي عدد الصواريخ التي يجب إطلاقها هو 2.

3- توزيع بواسون

يكثر استخدام توزيع بواسون (Poisson Distribution) في الحالات التي تقع فيها الأحداث وفقاً لمعدلات زمنية، كما يكثر استخدامه في النماذج الرياضية لحركة المرور، وكذلك في حالات الأحداث نادرة الوقوع، ومن الأمثلة ما يلي:

- عدد مرات زيارة المريض للطبيب في كل سنة.
- عدد أخطاء الطباعة لكل صفحة من صفحات الكتاب.
- عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة لكل سلعة معينة خلال شهر.
- عدد المكالمات الهاتفية.
- عدد مرات ري نوع من المحاصيل الزراعية خلال الموسم.

- بعض الظواهر الطبيعية النادرة كالحرائق والزلازل والحوادث على الطرق العامة.

الكثير من الظواهر العشوائية تتبع توزيع بواسون، ومن هذه الظواهر ظاهرة انبعاث الالكترونات من وعاء تفريغ أو من مادة حساسة تحت تأثير الضوء، أو ظاهرة الجزيئات المنبعثة من مصدر مشع، و أيضاً في مجال بحوث العمليات و العلوم الإدارية، مثل الطلب على العمل في السوق المركزي أو مسؤول التخزين في مصنع أو المدرجات في المطار، و كذلك ظاهرة معالجة البضائع في الميناء، و خطوط الاتصال، و وقوع الحوادث، والأخطاء. كذلك لتوزيع بواسون العديد من التطبيقات الهامة في مسائل الطوابير، و ذلك عندما نكون مهتمين بعدد الزبائن الواصلين إلى مطعم معين، أو عدد البواخر الواصلة إلى شاطئ البحر.

3-1 توزيع بواسون

نقول إن للمتغير العشوائي X توزيع بواسون ووسيطه $\lambda > 0$، إذا كانت له دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$P[x;\lambda] = P[X = x] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad ; \; x = 0,1,\dots\dots$$

إن الكثافة الأخيرة هي كثافة احتمالية فعلية لأن:

$$\sum_{x=0}^{\infty} P[x;\lambda] = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x}}{x!} = e^{-\lambda}\left(e^{\lambda}\right) = 1$$

ملاحظة:

إن e هي أساس اللوغاريتم الطبيعي، وقيمتها هي: $e = 2.718$ تقريباً. أما $x!$ فيعطى كما مر معنا في الفصل السادس بالعلاقة التالية:

$$x! = x(x-1)(x-2)\dots 3 \times 2 \times 1$$

3-2 التوقع الرياضي لمتغير عشوائي له توزيع بواسون

إذا كان X متغيراً عشوائياً له توزيع بواسون ووسيطه λ، فإن:

$$E(X) = \lambda$$

3-3 تباين متغير عشوائي له توزيع بواسون

إذا كان X متغيراً عشوائياً له توزيع بواسون ووسيطه λ، فإن:

$$V(X) = \lambda$$

3-4 الانحراف المعياري لمتغير عشوائي له توزيع بواسون

إذا كان X متغيراً عشوائياً له توزيع بواسون ووسيطه λ، فإن:

$$\sigma_X = \sqrt{\lambda}$$

3-5 الدالة المولدة للعزوم لتوزيع بواسون

إذا كان X متغيراً عشوائياً له توزيع بواسون ووسيطه $\lambda > 0$، فإن:

$$\begin{aligned} M_X(t) = E(e^{tx}) &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}\ ;\ t \in R \\ &= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^t\lambda)^x}{x!}\ ;\ t \in R \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t}\ ;\ t \in R \\ &= e^{\lambda(e^t-1)}\ ;\ t \in R \end{aligned}$$

وبالاشتقاق بالنسبة لـ t نجد:

$$M_X^{(1)}(t) = \lambda e^t\, e^{(e^t\lambda-\lambda)}$$

وأن:

$$M_X^{(2)}(t) = (\lambda + \lambda^2 e^t)e^t(e^{(e^t\lambda-\lambda)})$$

وبوضع $t = 0$ في عبارة المشتق الأول، وحسب العلاقة:

$$m_r = M_X^{(r)}(0) \quad ; r = 1,2,..,n$$

نجد أن:

$$m_1 = E(X) = M_X^{(1)}(0) = \lambda e^0\, e^{(e^0\lambda-\lambda)} = 1$$

وهو العزم من المرتبة الأولى.

وبوضع $t = 0$ في عبارة المشتق الثاني، وحسب العلاقة:

$$m_r = M_X^{(r)}(0) \quad ; r = 1,2,..,n$$

نجد أن:

$$m_2 = E(x^2) = M_X^{(2)}(0) = (\lambda + \lambda^2 e^0)e^0(e^{(e^0\lambda - \lambda)}) = \lambda + \lambda^2$$

وهو العزم من المرتبة الثانية.

مثال (6):

إذا علمنا أن عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر 3 وحدات شهريا، إذا عرفنا المتغير العشوائي X، بأنه عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة خلال الشهر من هذه السلعة.

والمطلوب:

1- ما احتمال أن الأسرة تستهلك وحدتين خلال الشهر؟

2- ما احتمال أن الأسرة تستهلك وحدة على الأقل خلال الشهر؟

3- ما احتمال أن الأسرة تستهلك 3 وحدات على الأكثر خلال الشهر؟

4- أوجد الوسط الحسابي لعدد الوحدات المستهلكة؟

5- أوجد الانحراف المعياري لعدد الوحدات المستهلكة؟

6- حدد شكل التوزيع؟

الحل:

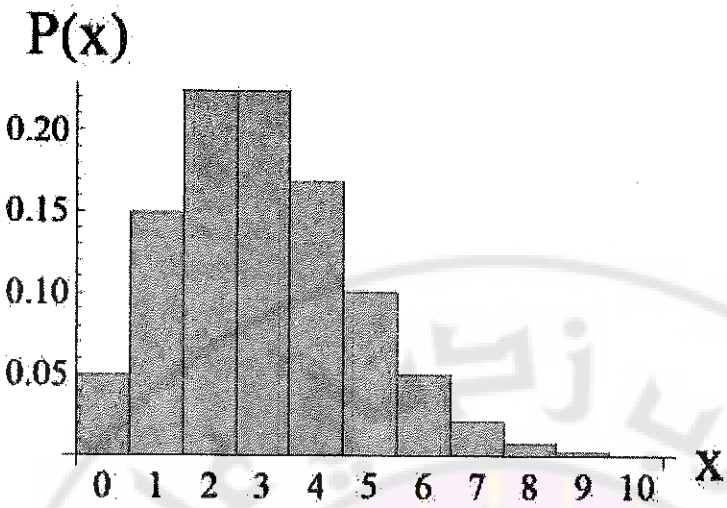
إن المتغير X هو متغير منفصل له توزيع بواسون، حيث: $\lambda = 3$

و دالة الكثافة الاحتمالية هي:

$$P[x;\lambda] = P[X = x] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-3}3^x}{x!} \qquad ;x = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

يوضح الشكل التالي المدرج الاحتمالي لدالة الكثافة من أجل:

$$x = 0,1,\ldots,10, \ \lambda = 3$$



1- احتمال أن الأسرة تستهلك وحدتين خلال الشهر:

$$P[x;3] = P[X=2] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{2!} = \frac{e^{-3}3^{2}}{2!}$$

$$= \frac{0.0498 \times 9}{2} = 0.22404$$

2- احتمال أن الأسرة تستهلك وحدة على الأقل خلال الشهر:

$$P[x;3] = P[X \geq 1] = P[X=3] + P[X=2] + P[X=1]$$

$$= 1 - P[X=0] \;\; 1 - \frac{e^{-3}3^{0}}{0!}$$

$$= 1 - \frac{0.0498}{1} = 0.9502$$

3- احتمال أن الأسرة تستهلك 3 وحدات على الأكثر خلال الشهر:

$$P[x;3] = P[X \leq 3]$$

$$= P[X=3] + P[X=2] + P[X=1] + P[X=0]$$

$$= \frac{e^{-3}3^{3}}{3!} + \frac{e^{-3}3^{2}}{2!} + \frac{e^{-3}3^{1}}{1!} + \frac{e^{-3}3^{0}}{0!}$$

$$= \frac{e^{-3} \times 27}{6} + \frac{e^{-3} \times 9}{2} + \frac{e^{-3} \times 3}{1} + \frac{e^{-3} \times 1}{1}$$

$$= \frac{e^{-3} \times 27}{6} + \frac{e^{-3} \times 9}{2} + \frac{e^{-3} \times 3}{1} + \frac{e^{-3} \times 1}{1}$$

$$= e^{-3}[\frac{27}{6} + \frac{9}{2} + \frac{3}{1} + \frac{1}{1}]$$
$$= 0.0498\ [\frac{27}{6} + \frac{9}{2} + \frac{3}{1} + \frac{1}{1}]$$
$$= 0.0498\ [13]$$
$$= 0.6474$$

4- المتوسط الحسابي أو التوقع الرياضي لعدد الوحدات المستهلكة:

$$E(X) = \lambda = 3$$

5- الانحراف المعياري لعدد الوحدات المستهلكة:

$$\sigma_X = \sqrt{\lambda} = \sqrt{3}$$

6- شكل التوزيع:

دائماً يكون شكل توزيع بواسون موجب الالتواء.

مثال (7):

إذا كان متوسط عدد طالبي استخدام آلة الصرف في أحد البنوك هو 5 أفراد كل نصف ساعة.

والمطلوب:

أولاً- احسب الاحتمالات التالية:

1- أن تكون عدد الواصلين خلال نصف ساعة هو 10 أشخاص؟

2- أن تكون عدد الواصلين خلال نصف ساعة يقل عن 3 أشخاص؟

3- أن تكون عدد الواصلين خلال نصف ساعة أكثر من شخص واحد؟

4- أن تكون عدد الواصلين خلال نصف ساعة بين 4 و 8 أشخاص؟

ثانياً- احسب الاحتمالات السابقة نفسها إذا كان معدل الوصول كل ربع ساعة؟

ثالثاً- احسب الاحتمالات السابقة نفسها إذا كان معدل الوصول كل ساعة؟

الحل:

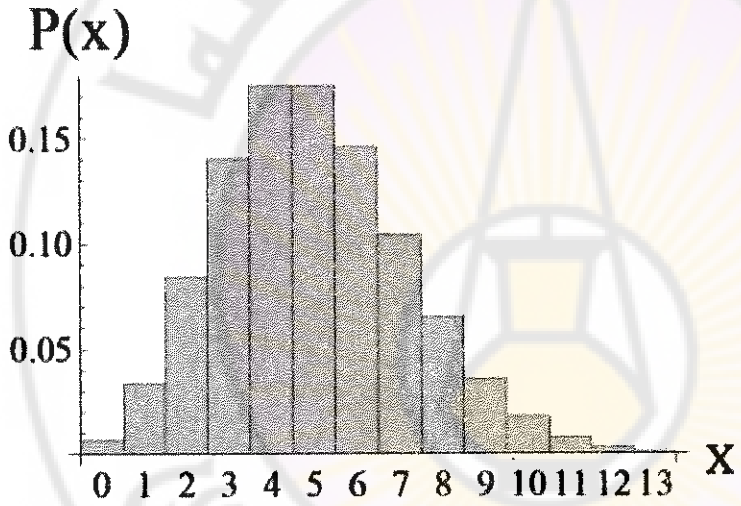
أولاً:

ليكن X المتغير العشوائي الدال على عدد الواصلين للصراف كل نصف ساعة، فيكون المتغير العشوائي X متغير منفصل له توزيع بواسون بوسيط $\lambda = 5$

إن دالة الكثافة الاحتمالية هي:

$$P[x;\lambda] = P[X = x] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \frac{e^{-5}5^{x}}{x!} \quad ; x = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

وبالتالي:



1- احتمال أن يكون عدد الواصلين خلال نصف ساعة 10 أشخاص:

$$P[X = x] = \frac{e^{-5}5^{x}}{x!}$$

$$P[X = 10] = \frac{e^{-5}5^{10}}{10!} = 0.018132789$$

2- احتمال أن يكون عدد الواصلين خلال نصف ساعة يقل عن 3 أشخاص:

$$P[X < 3] = P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2]$$
$$= \frac{e^{-5}5^0}{0!} + \frac{e^{-5}5^1}{1!} + \frac{e^{-5}5^2}{2!}$$
$$= 0.006737947 + 0.033689735 + 0.084224337$$
$$= 0.124652$$

3- احتمال أن يكون عدد الواصلين خلال نصف ساعة أكثر من شخص واحد:

$$P[X > 1] = 1 - P[X \leq 1]$$
$$= 1 - (P[X = 0] + P[X = 1])$$
$$= 1 - (\frac{e^{-5}5^0}{0!} + \frac{e^{-5}5^1}{1!})$$
$$= 1 - (0.006737947 + 0.033689735)$$
$$= 1 - 0.040428$$
$$= 0.959572318$$

4- احتمال أن يكون عدد الواصلين خلال نصف ساعة بين 4 و 8 أشخاص:

$$P[4 \leq X \leq 8] = P[X = 4] + P[X = 5] + P[X = 6] + P[X = 7] + P[X = 28]$$
$$= \frac{e^{-5}5^4}{4!} + \frac{e^{-5}5^5}{5!} + \frac{e^{-5}5^6}{6!} + \frac{e^{-5}5^7}{7!} + \frac{e^{-5}5^8}{8!}$$
$$= 0.17546737 + 0.17546737 + 0.146222808 +$$
$$0.104444863 + 0.065278039$$
$$= 0.66688045$$

ثانياً:

ليكن X المتغير العشوائي الدال على عدد الواصلين للصراف كل ربع ساعة، فيكون المتغير العشوائي X متغير منفصل له توزيع بواسون بوسيط

$$\lambda = 5 \times \frac{1}{2} = 2.5$$

ودالة الكثافة الاحتمالية:

$$P[x; \lambda] = P[X = x] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-2.5}2.5^x}{x!} \quad ; x = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

وبالتالي:

1- احتمال أن يكون عدد الواصلين خلال ربع ساعة 10 أشخاص:

$$P[X = x] = \frac{e^{-2.5}2.5^{x}}{x!}$$

$$P[X = 10] = \frac{e^{-2.5}2.5^{10}}{10!} = 0.000215725$$

2- احتمال أن يكون عدد الواصلين خلال ربع ساعة أقل من 3 أشخاص:

$$\begin{aligned} P[X < 3] &= P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] \\ &= \frac{e^{-2.5}2.5^{0}}{0!} + \frac{e^{-2.5}2.5^{1}}{1!} + \frac{e^{-2.5}2.5^{2}}{2!} \\ &= 0.082084999 + 0.205212497 + 0.256515621 \\ &= 0.543813 \end{aligned}$$

3- احتمال أن يكون عدد الواصلين خلال ربع ساعة أكثر من شخص واحد:

$$\begin{aligned} P[X > 1] &= 1 - P[X \leq 1] = 1 - (P[X = 0] + P[X = 1]) \\ &= 1 - (\frac{e^{-2.5}2.5^{0}}{0!} + \frac{e^{-2.5}2.5^{1}}{1!}) \\ &= 1 - (0.082084999 + 0.205212497) \\ &= 1 - 0.287297 = 0.712703 \end{aligned}$$

4- احتمال أن يكون عدد الواصلين خلال ربع ساعة بين 4 و 8 أشخاص:

$$\begin{aligned} P[4 \leq X \leq 8] &= P[X = 4] + P[X = 5] + P[X = 6] \\ &\quad + P[X = 7] + P[X = 28] \\ &= \frac{e^{-2.5}2.5^{4}}{4!} + \frac{e^{-2.5}2.5^{5}}{5!} + \frac{e^{-2.5}2.5^{6}}{6!} \\ &\quad + \frac{e^{-2.5}2.5^{7}}{7!} + \frac{e^{-2.5}2.5^{8}}{8!} \\ &= 0.133601886 + 0.066600943 \\ &\quad + 0.027833726 + 0.009940617 \\ &\quad + 0.003106443 = 0.241284 \end{aligned}$$

ثالثاً:

ليكن X المتغير العشوائي الدال على عدد الواصلين للصراف كل ساعة، فيكون المتغير العشوائي X متغيراً منفصلاً له توزيع بواسون

بوسيط $\lambda = 5 \times 2 = 10$

إن دالة الكثافة الاحتمالية هي:

$$P[x;\lambda] = P[X = x] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \frac{e^{-10}10^{x}}{x!} \quad ; x = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

و بالتالي:

1- احتمال أن يكون عدد الواصلين خلال ساعة 10 أشخاص:

$$P[X = x] = \frac{e^{-10}10^{x}}{x!}$$

$$P[X = 10] = \frac{e^{-10}10^{10}}{10!}$$

$$= 0.125110036$$

2- احتمال أن يكون عدد الواصلين خلال ساعة يقل عن 3 أشخاص:

$$P[X < 3] = P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2]$$

$$= \frac{e^{-10}10^{0}}{0!} + \frac{e^{-10}10^{1}}{1!} + \frac{e^{-10}10^{2}}{2!}$$

$$= 0.0000454 + 0.000454 + 0.00227$$

$$= 0.002769$$

3- احتمال أن يكون عدد الواصلين خلال ساعة أكثر من شخص واحد:

$$P[X > 1] = 1 - P[X \leq 1]\ 1 - (P[X = 0] + P[X = 1])$$

$$= 1 - (\frac{e^{-10}10^{0}}{0!} + \frac{e^{-10}10^{1}}{1!})$$

$$= 1 - (0.0000454 + 0.000454)$$

$$= 1 - 0.000499 = 0.999501$$

4- احتمال أن يكون عدد الواصلين خلال ساعة بين 4 و 8 أشخاص:

$$P[4 \leq X \leq 8] = P[X = 4] + P[X = 5] + P[X = 6]$$
$$+P[X = 7] + P[X = 28]$$

$$= \frac{e^{-10}10^4}{4!} + \frac{e^{-10}10^5}{5!} + \frac{e^{-10}10^6}{6!} + \frac{e^{-10}10^7}{7!} + \frac{e^{-10}10^8}{8!}$$

$$= 0.01891664 + 0.03783327 + 0.06305546 + 0.09007923 + 0.11259903 = 0.322484$$

مثال (8):

إذا كان متوسط وصول السفن إلى أحد الموانئ سفينتين في اليوم. والمطلوب: أوجد احتمال أن يصل إلى هذا الميناء في يوم معين ثلاث سفن؟

الحل:

لنفرض المتغير في هذا المثال: X . فيكون X متغير منفصل له توزيع بواسون بوسيط :

$$\lambda = 2$$

ودالة الكثافة الاحتمالية:

$$P[x;\lambda] = P[X = x] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-2}2^x}{x!}$$

إن احتمال أن يصل إلى هذا الميناء في يوم معين ثلاث سفن هو:

$$P[X = 3] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-2}2^3}{3!} = \frac{e^{-2}8}{6} = 0.18044704$$

6-3 مبرهنة

ليكن X متغيراً عشوائياً ثنائي الحدين، دالة كثافته الاحتمالية هي $b(X; n.p)$، عندئذ عندما $n \to \infty$ إلى اللانهاية ويسعى $p \to 0$ مع بقاء np ثابتاً، فإن:

$$b(X; n.p) \to P[x;\lambda]$$

العلاقة السابقة هي تقريب التوزيع الثنائي الحداني بتوزيع بواسون.

ملاحظة:

تعطى صيغة كثافة بواسون احتمالات مساوية تقريباً لتلك التي تعطيها دالة كثافة ثنائي الحداني، بشرط أن يكون n كبيراً جداً. ويكون الجداء np صغيراً نسبياً. ونستخدم التقريب السابق عملياً عندما يكون $\lambda = np < 5$.

مثال (9):

إذا كان احتمال أن يعاني شخص من ردة فعل سيئة عند حقنه بمصل معين 0.001. أوجد احتمال أن يكون من بين 2000 شخص سيحقنون بالمصل:

1- ثلاثة أشخاص سيعانون من ردة فعل سيئة ؟

2- أكثر من شخصين سيعانون من ردة فعل سيئة ؟

الحل:

لنفرض أن X متحول عشوائي يدل على عدد الأشخاص الذين يعانون من ردة فعل سيئة . فإن X يتوزع توزيعاً ثنائياً حدانياً، ووسطاؤه: $P = 0.001 , n = 2000$.

1- احتمال أن يعاني ثلاثة أشخاص من رد فعل سيئة هو:

$$P[X = 3] = b(3; 2000, 0.001) = 0.180537$$

-2

$$P[X \geq 2] = 1 - P[X \leq 1]$$
$$= 1 - P[X = 0] - P[x = 1] = 0.59413$$

فإذا لاحظنا أن $np < 5$ فهذا يسمح بتطبيق توزيع بواسون كتقريب للتوزيع الثنائي الحداني، و يكون لـ X دالة الكثافة $p(x; 2)$ ، حيث:

$$P[x; 2] = P[X = x] = \frac{e^{-2}2^x}{x!}$$

-1

$$P[3; 2] = P[X = 3] = \frac{e^{-2}2^3}{3!} = 0.180447$$

-2

$$P[X \geq 2] = 1 - P[X < 2]$$
$$P[X \geq 2] = 1 - P[X \leq 1]$$
$$P[X \geq 2] = 1 - P[X = 0] - P[X = 1]$$
$$P[X \geq 2] = 1 - \frac{e^{-2}2^0}{0!} - \frac{e^{-2}2^1}{1!} = 0.593994$$

وبالمقارنة بين النتائج في الحالتين نكتشف مدى جودة التقريب في هذا المثال.

$$\frac{e^{-2}2^3}{3!} = 0.180447$$

تمارين

السؤال الأول:

في تجربة إلقاء **قطعة نقود غير متزنة** لدينا:

$$P(H) = 0.4\,, \qquad P(T) = \mathbf{0.6}$$

ألقيت هذه القطعة ثلاث مرات بشكل مستقل، وليكن المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد مرات ظهور الصورة في الرميات الثلاث. والمطلوب:

1- أوجد دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X؟

2- أوجد التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X ؟

3- أوجد التباين للمتغير العشوائي X ؟

4- أوجد الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X ؟

5- أوجد الاحتمالات التالية:

1 . الحصول على صورتين؟

2. الحصول على صورتين على الأقل؟

3. الحصول على صورة واحدة على الأكثر؟

4. الحصول على ثلاث كتابات؟

5. الحصول على ثلاث صور؟

6. الحصول على صورة واحدة على الأقل؟

السؤال الثاني:

إن نسبة الإنتاج التالف لأحد مصانع المصابيح هي 10%، إذا أخذت عينة عشوائية مؤلفة من 5 مصابيح من إنتاج هذا المصنع. والمطلوب:

1- أوجد الاحتمالات التالية:

1. الحصول على مصباح واحد تالف؟

2. الحصول على جميع المصابيح تالفة؟
3. الحصول على مصباح واحد تالف على الأكثر؟
4. الحعلى مصباح واحد تالف على الأقل؟
5. الحصول على ثلاثة مصابيح تالفة؟

2- أوجد العدد المتوقع للمصابيح التالفة في العينة؟

3- أوجد الانحراف المعياري للمصابيح التالفة في العينة؟

السؤال الثالث:

إذا كانت نسبة النجاح في أحد المقررات0.8 ، فإذا تقدم لهذا الامتحان 15 طالباً فقط.

والمطلوب، أوجد الاحتمالات التالية:

1- أن ينجح جميع الطلاب؟

2- أن ينجح 8 طلاب؟

3- أن لا ينجح أي طالب؟

4- أن ينجح طالب واحد على الأكثر؟

السؤال الرابع:

إذا كانت نسبة الإصابة بمرض الأنفلونزا شخص في إحدى المدن في فصل الشتاء 0.6. وإذا تم اختيار 20 شخصاً من هذه المدينة بطريقة عشوائية.

والمطلوب، أوجد الاحتمالات التالية:

1- أن يكون 7 أشخاص مصابين بمرض الأنفلونزا؟

2- أن يكون جميع الأشخاص أصحاء؟

3- أن يكون جميع الأشخاص مصابين بمرض الأنفلونزا؟

4- أن يكون نصف الأشخاص مصابين بمرض الأنفلونزا؟

5- أن يكون ثلاثة أشخاص على الأقل مصابين بمرض الأنفلونزا؟

6- أن يكون ثلاثة أشخاص على الأكثر مصابين بمرض الأنفلونزا؟

7- أن يكون شخص واحد على الأقل مصاب بمرض الأنفلونزا؟

8- أن يكون شخص واحد على الأكثر مصاب بمرض الأنفلونزا؟

الفصل التاسع

التوزيعات الاحتمالية المستمرة الشهيرة

1- التوزيع المنتظم

يعد التوزيع المنتظم (Uniform distribution) من التوزيعات الاحتمالية المستمرة المهمة في التطبيقات الإحصائية، ويستخدم في حالة الظواهر الطبيعية التي تحدث بشكل منتظم.

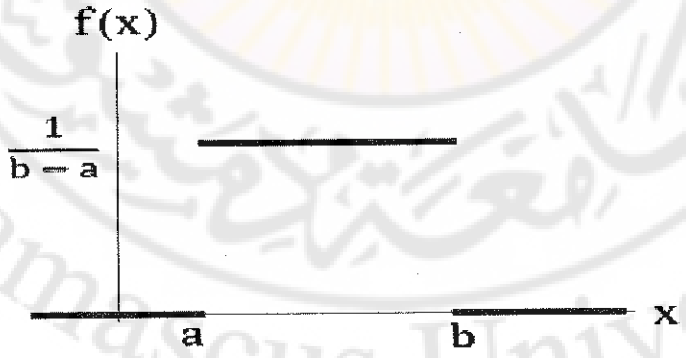
1-1 التوزيع المنتظم

نقول إن للمتغير العشوائي X له التوزيع المنتظم، إذا كانت له دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & ; \quad a < x < b \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

حيث: $a < b$ و $a, b \in R$.

تدعى $f(x)$ دالة الكثافة المنتظمة على المجال $[a, b]$، وتمثل بالشكل (1-9) التالي:



الشكل (1-9) دالة الكثافة المنتظمة على المجال $[a, b]$

وواضح هنا أن:

$$\forall x \in [a,b]: \quad f(x) \geq 0\,, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b \frac{dx}{b-a} = 1$$

2-1 دالة التوزيع المنتظم

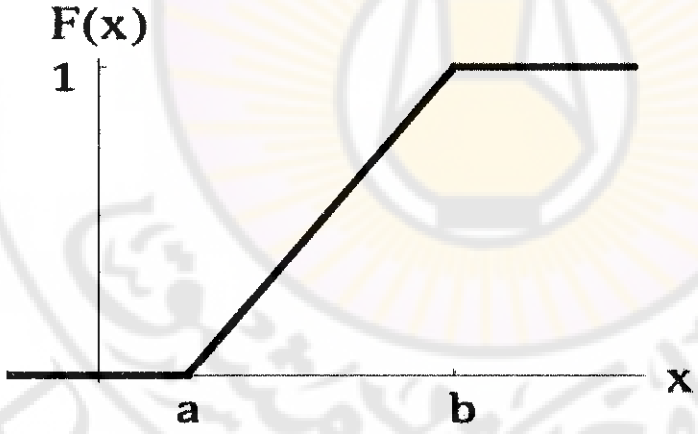
تعطى دالة التوزيع المنظم بالعلاقة التالية:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = \int_a^x \frac{dt}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}$$

أي

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \ x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & ; \ a < x < b \\ 1 & ; \ x \geq b \end{cases}$$

وتمثل بالشكل (2-9)



الشكل (2-9) دالة التوزيع المنتظمة على المجال [a, b]

3-1 التوقع الرياضي لمتغير عشوائي له توزيع منتظم

إذا كان X متغيراً عشوائياً له توزيع منتظم، فإن:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

1-4 تباين متغير عشوائي له توزيع منتظم

إذا كان X متغيراً عشوائياً له توزيع منتظم، فإن:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x)\, dx - [E(X)]^2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{b-a} dx - (\frac{b+a}{2})^2$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b - (\frac{b+a}{2})^2$$

$$= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{(b+a)^2}{4}$$

$$= \frac{(b+a)^2}{12}$$

1-5 الانحراف المعياري لمتغير عشوائي له التوزيع المنتظم

إذا كان X متغيراً عشوائياً له توزيع منتظم، فإن:

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

1-6 الدالة المولدة للعزوم للتوزيع المنتظم

إذا كان X متغيراً عشوائياً له توزيع منتظم، فإن:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_a^b \frac{1}{b-a} e^{tx} dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{t}e^{tx}\right]_a^b = \frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$$

مثال (1):

استورد أحد المراكز التجارية 1500 طن بطاطا، ووضعها في مخزن، وقام ببيعها بكميات متساوية على مدار شهور السنة. وإذا كانت الفترة الزمنية للبيع تتبع التوزيع المنتظم.

والمطلوب:

1- أوجد دالة الكثافة الاحتمالية المعبرة عن الفترة الزمنية للبيع؟

2- ارسم دالة الكثافة الاحتمالية؟

3- أوجد دالة التوزيع؟

4- ارسم دالة التوزيع؟

5- أوجد التوقع و الانحراف المعياري؟

6- عين الدالة المولدة للعزوم؟

7- بعد مرور سبعة أشهر من بداية البيع، ما الكمية الموجودة بالمخزن؟

الحل:

بفرض أن المتغير X يعبر عن الفترة الزمنية للبيع مقاسه بالشهر، أي أن:

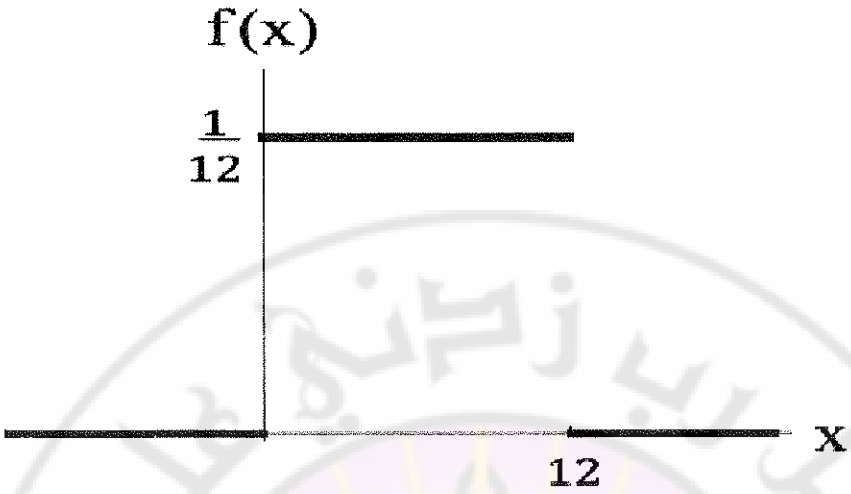
$$0 < X < 12$$

1- دالة الكثافة الاحتمالية:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$
$$= \frac{1}{12-0}$$
$$= \frac{1}{12}$$

حيث: $0 < x < 12$

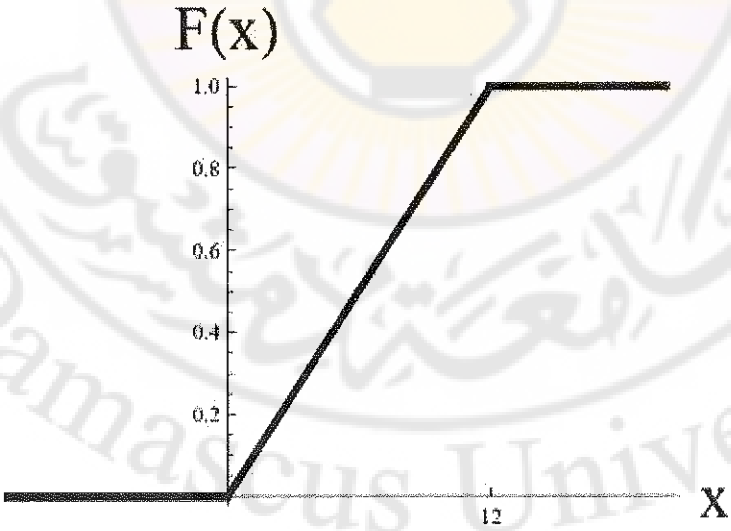
2- رسم دالة الكثافة الاحتمالية:



3- دالة التوزيع:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \ x \le 0 \\ \frac{x}{12} & ; \ 0 < x < 12 \\ 1 & ; \ x \ge 12 \end{cases}$$

4- رسم دالة التوزيع:



5- التوقع و الانحراف المعياري

$$E(X) = \frac{b+a}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{144}{12} = 12$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

6- الدالة المولدة للعزوم:

$$M_X(t) = \frac{e^{12t}}{12t}$$

7- بعد مرور سبعة أشهر من بداية البيع، إن الكمية الموجودة بالمخزن هي:

$$1500\times P[X>7] = 1500\times(1-P[X\leq 7])$$

$$1500\times P[X>7] = 1500\times(1-F(7))$$

$$= 1500 \times \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)$$

$$= 1500 \times \left(1 - \frac{7-0}{12-0}\right)$$

$$= 1500 \times \left(1 - \frac{7}{12}\right)$$

$$= 625$$

2- التوزيع الأسي

يعدّ التوزيع الأسي (Exponential Distribution) من التوزيعات الاحتمالية المستمرة المهمة جداً، والتي تصف الكثير من الظواهر العشوائية التي تتعلق بقياس الزمن المتبقي.

ومن الأمثلة على التوزيع الأسي ما يلي:

- الزمن الذي تستغرقه آلة كي تتعطل.
- الزمن الذي يستغرقة مصباح كي يحترق.
- الزمن بين وصول زبون وزبون آخر في مركز تسوق
- الزمن الذي يستغرقه صراف في بنك لتلبية خدمة الزبون.

- الزمن الذي تستغرقه كي تنسج آلة حياكة سجادة.

كما هو مبين فإن التوزيع الأسي يستخدم في مسائل متعلقة بقياس الزمن، مثل مدة خدمة شباك البريد، مدة مكالمة هاتفية، مدة تفريغ باخرة شحن، مدة تصليح آلة، مدة انتظار زبون قبل الحصول على الخدمة.

وفي العلوم الدقيقة يستخدم التوزيع الأسي لتمثيل مدة حياة الذرات المشعة (Atomes Radioactives) قبل أن تتفكك، حيث يعبر الوسيط عن اللحظة التي يبقى فيها نصف المجتمع الأصلي.

عادة ما يستخدم التوزيع الأسي لتمثيل مدة حياة ظاهرة ما لها متوسط ثابت، وكانت هذه الظاهرة لا تخضع للتقادم (Vieillissement)،أي أن مدة حياة الظاهرة بعد لحظة ما T لا تتبع اللحظة T؛ أي لا تتأثر بالمدة التي دامتها الظاهرة من قبل، فعلى سبيل المثال، قد نستبعد استخدام التوزيع الأسي لتمثيل مدة حياة آلة عاملة قبل تعطلها لأن احتمال تعطلها في لحظة ليس مستقلاً عن المدة التي عملتها الآلة من قبل، وكذلك الحال بالنسبة لمدة حياة الإنسان.

نشير أخيراً إلى أن للتوزيع الأسي علاقة بالتوزيع البواسوني، فإذا كان وقوع أحداث ما يتبع التوزيع البواسوني، فإن المدة بين وقوع حدثين تتبع التوزيع الأسي؛ كمثال على ذلك، إذا كان وصول الزبائن إلى مركز خدمة ما يتبع توزيع بواسون فإن المدة الزمنية بين وصول زبون والزبون التالي تتبع التوزيع الأسي.

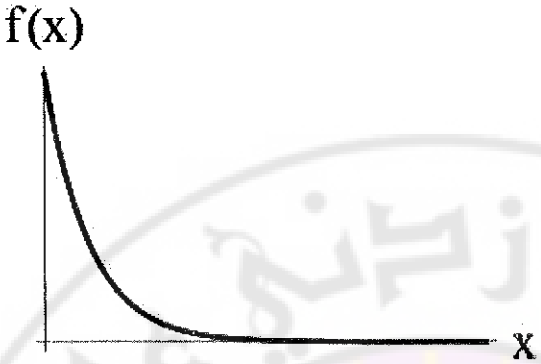
1-2 التوزيع الأسي

نقول إن للمتغير العشوائي X التوزيع الأسي ووسيطه $\lambda > 0$، إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية هي:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ; \quad x \geq 0 \\ 0 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

حيث $\lambda > 0$ ومقلوبه يمثل المعدل الذي تحصل فيه الظاهرة العشوائية على سبيل المثال الزمن الذي تستغرقه مولدة كهربائية كي تتوقف عن العمل. ويبين

الشكل (9–3) التالي دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الأسي. يجب التنويه إلى أن شكل دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الأسي يتغير بتغير القيم التي تأخذها λ.



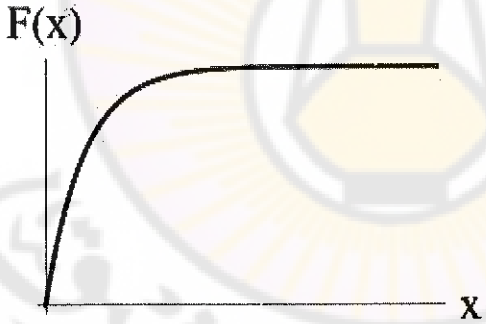
الشكل (9–3) دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الأسي

2–2 دالة التوزيع الأسي

تعطى دالة التوزيع الأسي بالعلاقة التالية:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & ; \quad x \geq 0 \\ 0 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

ويبين الشكل (9–4) التالي دالة التوزيع الأسي.



الشكل (9–4) دالة التوزيع الأسي

3–2 التوقع الرياضي لمتغير عشوائي له التوزيع الأسي

إذا كان X متغيراً عشوائياً له التوزيع الأسي ووسيطه $\lambda > 0$، فإن:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \lambda \int_{0}^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

2-4 تباين متغير عشوائي له توزيع أسي

إذا كان X متغيراً عشوائياً له التوزيع الأسي ووسيطه $\lambda > 0$، فإن:

$$V(X) = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

2-5 الانحراف المعياري لمتغير عشوائي له توزيع أسي

إذا كان X متغيراً عشوائياً له التوزيع الأسي ووسيطه $\lambda > 0$، فإن:

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \frac{1}{\lambda}$$

2-6 الدالة المولدة للعزوم للتوزيع الأسي

إذا كان X متغيراً عشوائياً له التوزيع الأسي ووسيطه $\lambda > 0$، فإن:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx}\left(\lambda e^{-\lambda x}\right) dx \quad = \lambda \int_{0}^{+\infty} e^{(t-\lambda)x}\, dx$$

$$= \left[\frac{\lambda e^{(t-\lambda)x}}{t-\lambda}\right]_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad ; t < \lambda$$

التكامل متقارب فقط عندما $t < \lambda$.

مثال (2):

ليكن متوسط عمر مصباح 8760 ساعة إضاءة، فإذا علم أن عمر المصباح له التوزيع الأسي، فأوجد ما يلي:

1- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن عمر المصباح؟

2- دالة التوزيع المعبرة عن عمر المصباح؟

3- احتمال أن يستمر المصباح في الإضاءة لأكثر من 3 سنوات قبل أن يحترق؟

4- احتمال أن يحترق المصباح بعد شهر من بداية استخدامه؟

5- احتمال أن يحترق المصباح خلال ساعة من استخدامه؟

الحل:

بفرض أن المتغير X يعبر عن عمر المصباح، أي: $0 < X < +\infty$ ، فإن:

$$\frac{1}{\lambda} = 8760 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{8760}$$

1- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن عمر المصباح:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} = \frac{1}{8760} e^{-\frac{x}{8760}} \quad , \qquad 0 < x < +\infty$$

2- دالة التوزيع المعبرة عن عمر المصباح:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{8760}} & ; \quad x \geq 0 \\ 0 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

3- إن متوسط عمر المصباح خلال ثلاث سنوات هو:

$$3 \times 8760 = 26280$$

(لاحظ أن 8760 ساعة تعادل 365 يوماً، أي سنة)، فيكون:

$$P[X > 26280] = 1 - P[X \leq 26280]$$
$$P[X > 26280] = 1 - F(26280)$$
$$P[X > 26280] = 1 - [1 - e^{-\frac{26280}{8760}}]$$
$$P[X > 26280] = e^{-3} = 0.0498$$

4- إن متوسط عمر المصباح خلال شهر هو: $\frac{8760}{12} = 720$، و منه:

$$P[X < 720] = F(720)$$
$$P[X < 720] = 1 - e^{-\frac{720}{8760}}$$
$$P[X < 720] = 1 - e^{-0.08219}$$
$$P[X < 720] = 0.0789$$

5- احتمال أن يحترق المصباح خلال ساعة من استخدامه هو:

$$P[X < 1] = F(1)$$
$$P[X < 1] = 1 - e^{-\frac{1}{8760}}$$
$$P[X < 1] = 1 - e^{-0.000114155}$$
$$P[X < 1] = 0.000114148$$

مثال (3):

إذا كانت الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل في البنك تتبع توزيع أسي بمتوسط حسابي 2 دقيقة.

فأوجد ما يلي:

1- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل؟

2- ما احتمال إنهاء خدمة العميل في أقل من دقيقة.

الحل:

بفرض أن المتغير X يعبر عن الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل بالدقيقة، أي:

$$0 < X < +\infty$$

فإن:

$$\frac{1}{\lambda} = 2 \Longrightarrow \lambda = 0.5$$

1- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} = 0.5e^{-0.5x} \quad , \quad 0 < x < +\infty$$

2- احتمال إنهاء خدمة العميل في أقل من دقيقة:

$$P[X \leq 1] = F(1)$$
$$P[X \leq 1] = 1 - 0.5e^{-0.5x} \quad = 1 - 0.5e^{-0.5\times 1} \quad = 0.3935$$

3- التوزيع الطبيعي

يعدّ التوزيع الطبيعي (Normal Distribution) من أكثر التوزيعات الاحتمالية المستمرة استخداماً وخاصة في مجال الإحصاء التطبيقي، وذلك لأن الكثير من الظواهر الطبيعية تخضع لهذا التوزيع. فلو اخترنا عشوائياً مئة أو ألفاً من المارين في شارع ما، وقسنا أطوالهم، لوجدنا نسبة كبيرة منها قريبة من متوسط ما، ونسبة قليلة من طوال القامة، ونسبة مقاربة لها من قصار القامة. وكذلك الأمر بالنسبة للأوزان.

ولو مثلنا هذه البيانات بيانياً لكان المنحني الذي يمثل النسبة، أو ما يمكن أن نسميه الاحتمال ذا شكل جرسي متماثل حول المتوسط، وهي صفات التوزيع الطبيعي.

كما إن الكثير من الظواهر الطبيعية التي لا تخضع لهذا التوزيع، يمكن أن يقرّب توزيعها بالتوزيع الطبيعي.

ولهذا التوزيع العديد من التطبيقات المهمة في الحياة العملية لمعظم الظواهر الطبيعية مثل:

- أطوال الأشخاص.
- أوزان الأشخاص.
- درجات الطلاب في إحدى المقررات.
- مقياس ضغط الدم.

3-1 التوزيع الطبيعي

نقول إن للمتغير العشوائي X التوزيع الطبيعي ووسطاؤه: μ, σ^2، إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$x \in R, \qquad \sigma > 0, \qquad -\infty < \mu < +\infty$$

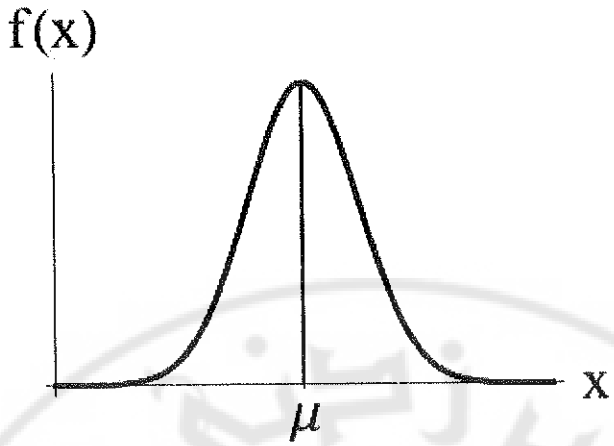
ونكتب اختصاراً

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

وسنبين فيما بعد أن الوسيطين μ و σ^2 هما القيمة المتوسطة والتباين للتوزيع الطبيعي.

التوزيع الطبيعي هو توزيع متناظر حول المتوسط μ وله الشكل الناقوس (الجرس)، وتساوي مساحته الكلية تحت المنحني البياني القيمة واحد.

والشكل (9-5) يبين أن الخط البياني متماثل على جانبي المتوسط الحسابي μ.



الشكل (9-5) دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي

كما تتمتع دالة الكثافة الطبيعية بالخواص:

1- المساحة المحصورة بين المنحني البياني لدالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي ومحور الفواصل مساوية للواحد، أي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

2- تبلغ الدالة نهايتها العظمى عند: $X = \mu >$

وقيمة هذه النهاية هي:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

وتتناقص عند طرفي هذه النهاية.

3- المنحني البياني لدالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي متناظر بالنسبة للمستقيم $x = \mu$ ، أي أن المساحة على يمين ذلك المستقيم تساوي المساحة على يساره.

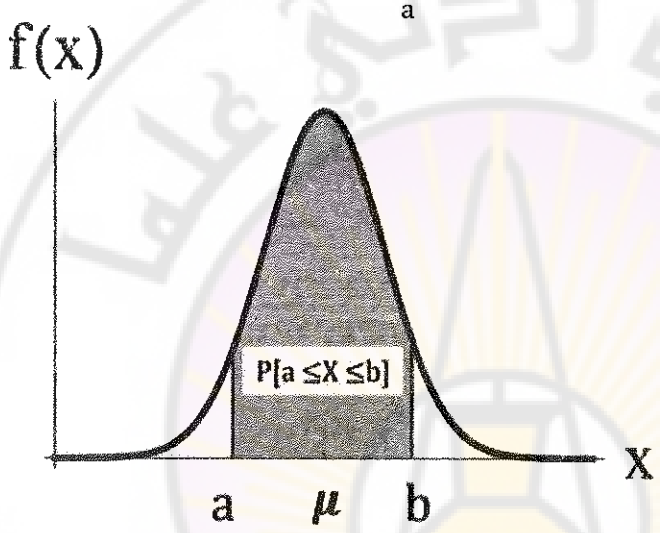
4- المنحني البياني لدالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي له شكل الجرس.

5- المنحني البياني لدالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي له خط مقارب هو محور الفواصل.

6- في التوزيع الطبيعي، يكون المتوسط= الوسيط=المنوال=μ.

7- إن المساحة المبينة في الشكل (9-6) والمحددة بدالة الكثافة و محور الفواصل و كل من المستقيمين $x = a$ و $x = b$ تمثل احتمال وقوع x بين a و b ونكتب:

$$P[a \le X \le b] = \int_a^b f(x)\,dx$$

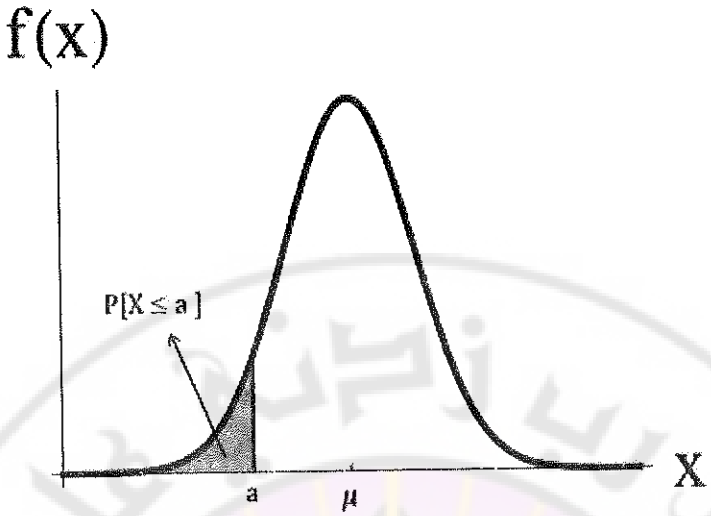


الشكل (9-6) $P[a \le X \le b] = \int_a^b f(x)\,dx$

8- تمثل قيمة الاحتمال $P[X \le a]$ و الممثلة بالشكل (9-7) المساحة الواقعة تحت منحني الكثافة الطبيعية والواقعة إلى اليسار من القيمة a ، والتي تمثل عدداً حقيقياً بدورها.

ونكتب:

$$P[X \le a] = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$$

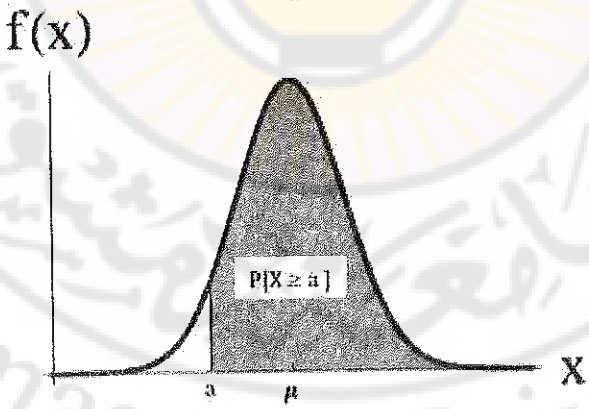


الشكل (9-7) $P[X \le a] = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$

9- تمثل قيمة الاحتمال $P[X \ge a]$ و الممثلة بالشكل (9-8) المساحة الواقعة تحت منحني الكثافة الطبيعية والواقعة إلى اليمين من القيمة a ، والتي تمثل عدداً حقيقياً بدورها.

ونكتب:

$$P[X \ge a] = \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$



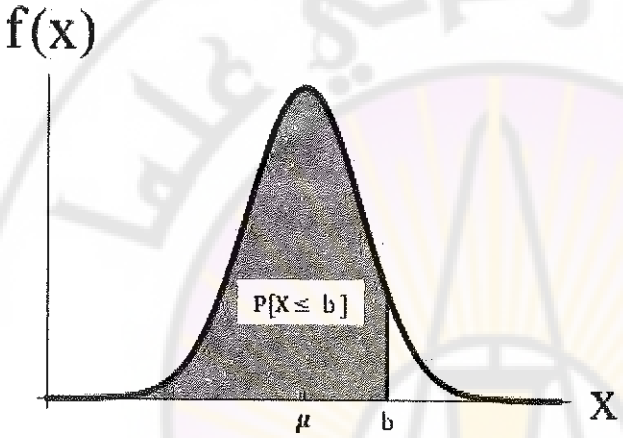
الشكل (9-8) $P[X \ge a] = \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$

لاحظ أن $P[X \ge a] = 1 - P[X < a]$

10- تمثل قيمة الاحتمال $P[X \le b]$ و الممثلة بالشكل (9-9) المساحة الواقعة تحت منحني الكثافة الطبيعية والواقعة إلى اليسار من القيمة b ، والتي تمثل عدداً حقيقياً بدورها.

ونكتب:

$$P[X \le b] = \int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx$$

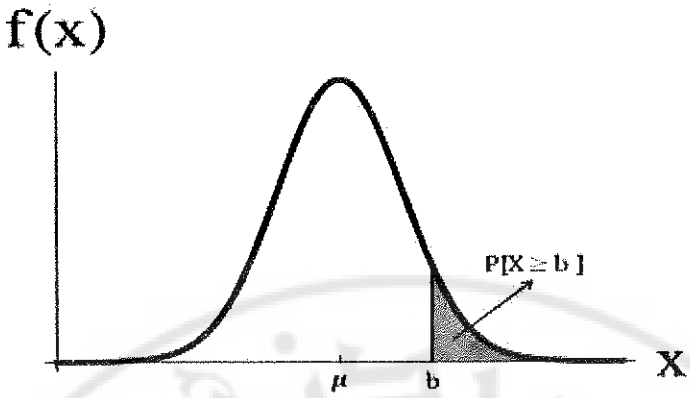


الشكل (9-9) $P[X \le b] = \int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx$

11- تمثل قيمة الاحتمال $P[X \ge b]$ والممثلة بالشكل (9-10) المساحة الواقعة تحت منحني الكثافة الطبيعية والواقعة إلى اليمين من القيمة b ، والتي تمثل عدداً حقيقياً بدورها.

ونكتب:

$$P[X \ge b] = \int_{b}^{+\infty} f(x)\, dx$$



الشكل (9–10) $P[X \geq b] = \int_b^{+\infty} f(x)\, dx$

3–2 دالة التوزيع الطبيعي

تعطى دالة التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي X بالعلاقة التالية:

$$F(x) = P[X \leq x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

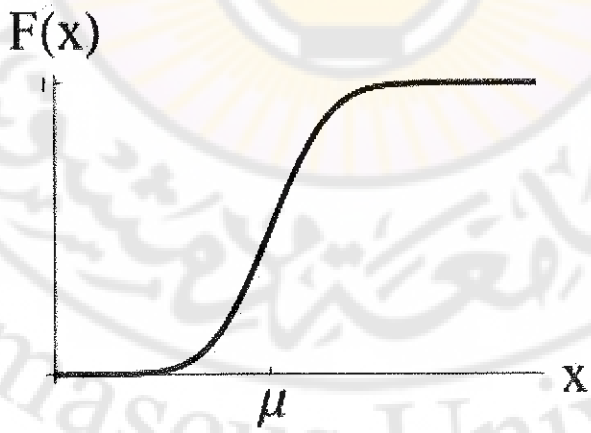
حيث:

x : تمثل القيمة التي يراد حساب قيمة دالة التوزيع عندها.

μ: تمثل التوقع الرياضي للمتغير العشوائي الطبيعي X .

σ: تمثل الانحراف المعياري للمتغير العشوائي الطبيعي X .

والشكل (9–11) يبين دالة التوزيع الطبيعي.



الشكل (9–11) دالة التوزيع الطبيعي

3-4 الدالة المولدة للعزوم للتوزيع الطبيعي

إذا كان X متغيراً عشوائياً له التوزيع الطبيعي ووسطاؤه: μ, σ^2 ، عندئذ:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \quad , \qquad \forall t \in R$$

3-5 التوقع الرياضي لمتغير عشوائي له التوزيع الطبيعي

إذا كان X متغير عشوائي له التوزيع الطبيعي ووسطاؤه: μ, σ^2 ، فإن:

$$E(X) = \frac{dM_X(t)}{dt}\bigg|_{t=0} = (\mu + \sigma^2 t)e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}\bigg|_{t=0} = \mu$$

3-6 تباين متغير عشوائي له التوزيع الطبيعي

إذا كان X متغيراً عشوائياً له التوزيع الطبيعي ووسطاؤه: μ, σ^2 ، فإن:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

لنحسب $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \frac{d^2M_X(t)}{dt}\bigg|_{t=0}$$
$$= \sigma^2 e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} + (\mu + \sigma^2 t)^2 e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}\bigg|_{t=0}$$
$$= \sigma^2 + \mu^2$$

وبالتالي:

$$V(X) = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

3-7 الانحراف المعياري لمتغير عشوائي له توزيع طبيعي

إذا كان X متغيراً عشوائياً له التوزيع الطبيعي ووسطاؤه: μ, σ^2 ، فإن:

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma$$

3-8 بعض خواص المتغيرات العشوائية الطبيعية المستقلة

3-8-1 مبرهنة 1

إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة، ولكل منها التوزيع الطبيعي بمتوسطات $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$، وتباينات $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots \sigma_n^2$، فإن:

$$a_1X_1+a_2X_2+\ldots+a_nX_n \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2\right)$$

حيث: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ثوابت حقيقية.

3-8-2 مبرهنة 2

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة، ولها جميعها التوزيع الطبيعي نفسه بمتوسط μ، وتباين σ^2، فإنه يكون للمتغير العشوائي:

$$Y = X_1+X_2+\ldots+X_n$$

التوزيع الطبيعي:

$$N(n\mu, n\sigma^2)$$

3-8-3 مبرهنة 3

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة، ولها جميعها التوزيع الطبيعي نفسه بمتوسط μ، وتباين σ^2، فإنه يكون للمتغير العشوائي:

$$\overline{X} = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

التوزيع الطبيعي:

$$N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

3-8-4 مبرهنة 4

إذا كان X متغيراً عشوائياً له التوزيع الطبيعي $N(\mu\, \sigma^2)$، فإن المتغير العشوائي:

$$Y = aX + b$$

يكون له التوزيع الطبيعي:

$$N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

4- التوزيع الطبيعي المعياري

يعّد التوزيع الطبيعي المعياري (Standard Normal Distribution) حالة خاصة من التوزيع الطبيعي.

4-1 تعريف التوزيع الطبيعي المعياري

نقول إن للمتغير العشوائي Z التوزيع الطبيعي المعياري، ونرمز له:

$$Z \sim N(0,1)$$

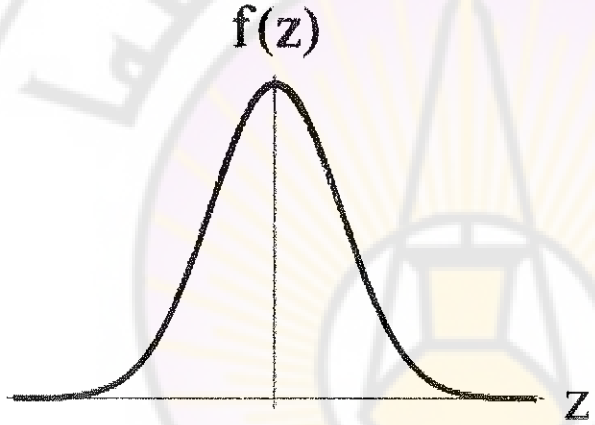
إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية هي:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

حيث:

z : تمثل القيمة التي يراد حساب قيمة دالة الكثافة الاحتمالية عندها.

والشكل (9-12) دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي المعياري.



الشكل (9-12) دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي المعياري.

ملاحظة (1):

إن التوزيع الطبيعي المعياري حالة خاصة من التوزيع الطبيعي يكون فيها:

$$\mu = 0 \quad \text{و} \quad \sigma^2 = 1$$

ملاحظة (2):

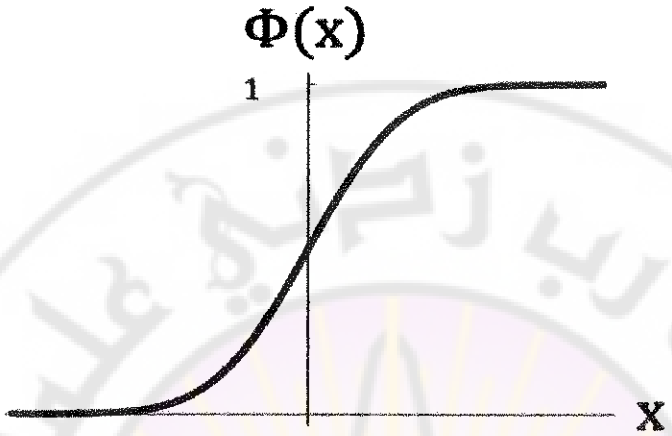
إن دالة الكثافة الطبيعية المعيارية تحقق خواص دالة الكثافة الطبيعية كونها حالة خاصة منها.

4-2 دالة التوزيع الطبيعي المعياري

تعطى دالة التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي Z بالعلاقة التالية:

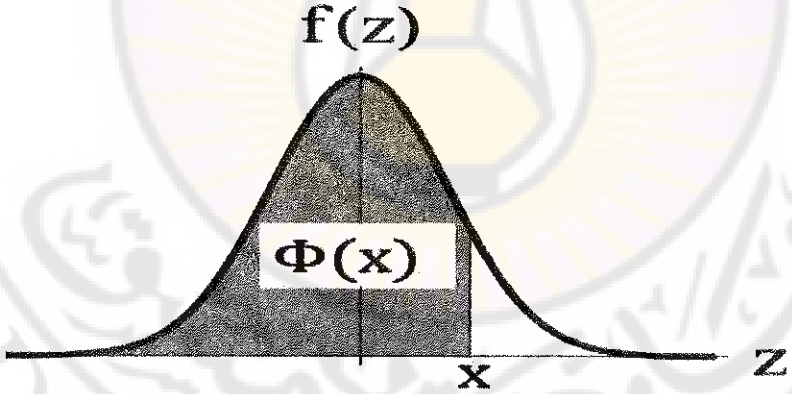
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

يمثل الشكل (9-13) دالة التوزيع الطبيعي المعياري.



الشكل (9-13) دالة التوزيع الطبيعي المعياري.

إن قيم $\Phi(x)$ تمثل المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(z)$ ومحور الفواصل والمستقيم $z = x$، وهي المساحة المظللة على الشكل (9-14) التالي:



الشكل (9-14) منحني الكثافة للتوزيع الطبيعي المعياري

3-4 التوقع الرياضي لمتغير عشوائي له التوزيع الطبيعي المعياري

إذا كان Z متغيراً عشوائياً له التوزيع الطبيعي المعياري، عندئذ:

$$E(Z) = 0$$

4-4 تباين متغير عشوائي له التوزيع الطبيعي المعياري

إذا كان Z متغيراً عشوائياً له التوزيع الطبيعي المعياري، عندئذ:

$$V(Z) = 1$$

5-4 الانحراف المعياري لمتغير عشوائي له توزيع طبيعي معياري

إذا كان Z متغيراً عشوائياً له التوزيع الطبيعي المعياري، عندئذ:

$$\sigma_Z = 1$$

6-4 الدالة المولدة للعزوم للتوزيع الطبيعي المعياري

إذا كان Z متغيراً عشوائياً له التوزيع الطبيعي المعياري، عندئذ:

$$M_Z(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \quad , \qquad t \in R$$

مبرهنة

إذا كان X متغيراً عشوائياً طبيعياً ودالة توزيعه $F(x)$، فإن:

$$F(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

وهكذا نلاحظ أن قيم دالة التوزيع $F(x)$ للمتغير العشوائي الذي له التوزيع الطبيعي تعطى بدلالة دالة التوزيع $\Phi(Z)$ للمتغير العشوائي المعياري Z، وذلك حسب العلاقة:

$$F(x) = \Phi(z) \quad ; \quad z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

7-4 كيفية حساب الاحتمالات لمتغير عشوائي طبيعي

لإيجاد احتمالات المتغير العشوائي الطبيعي $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ، فإننا نحوله أولاً إلى متغير عشوائي طبيعي معياري $Z \sim N(0,1)$.

ثم نستخدم جداول التوزيع الطبيعي المعياري لإيجاد الاحتمالات. ونوضح ذلك كما يلي:

لإيجاد الاحتمال $P(a \le X \le b)$ و الذي يحدد بالمساحة أسفل المنحني البياني المبين في الشكل (9-6)، نحسب التكامل التالي:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

وهذا التكامل يُصعب إيجاده، لذا تُستخدم العلاقة التالية:

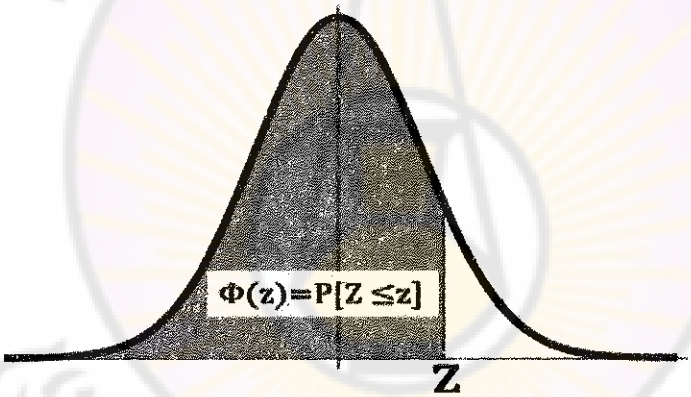
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

حيث يتم الانتقال من متغير عشوائي طبيعي X إلى متغير عشوائي طبيعي معياري Z.

وقد قام الإحصائيون بتصميم جداول إحصائية لحساب دالة التوزيع المتجمع للمتغير الطبيعي المعياري

$$\Phi(z) = P[Z \le z]$$

والمبين في الشكل التالي (9–15).



الشكل (9–15) دالة التوزيع الطبيعي المعياري المتجمع

وبالعودة إلى خطوات حساب الاحتمال:

$$P[a \le X \le b]$$

وباستخدام العلاقة:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

1– يتم تحويل القيم الطبيعية a و b إلى قيم طبيعية معيارية، كما يلي:

$$z_1 = \frac{a-\mu}{\sigma}$$

و

$$z_2 = \frac{b-\mu}{\sigma}$$

2- ومن ثم يكون احتمال:

$$P[a \le X \le b] = P\left[\frac{a-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right]$$

$$P[a \le X \le b] = P[z_1 \le Z \le z_2]$$

$$P[a \le X \le b] = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$$

3- بعد ذلك تُستخدم جداول التوزيع الطبيعي المعياري والذي يعطي المساحة الخاصة بالاحتمال:

$$\Phi(z) = P[Z \le z]$$

مثال (4):

استخدم جداول التوزيع الطبيعي القياسي في حساب الاحتمالات التالية:

1- $P[Z < 1.57]$

2- $P[Z > 1.96]$

3- $P[Z < -2.33]$

4- $P[-2.01 < Z < 1.28]$

الحل:

1- باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري، نوجد احتمال:

$$P[Z < 1.57] = \Phi(1.57)$$

كما هو مبين في الشكل التالي:

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
1.5								.9418		

فيكون الاحتمال المطلوب:

$$P[Z < 1.57] = \Phi(1.57)$$
$$= 0.9418$$

2- حساب احتمال $P[Z > 1.96]$

$$P[Z > 1.96] = 1 - P[Z \leq 1.96]$$
$$= 1 - \Phi(1.96)$$

وباستخدام جدول التوزيع المعياري الطريقة السابقة بنفسها:

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
1.9							.9750			

يكون احتمال:

$$P[Z > 1.96] = 1 - 0.9750$$
$$= 0.0250$$

3- حساب احتمال:

$$P[z < -2.33]$$

نلاحظ أن جدول التوزيع الطبيعي المعياري يعطي قيماً موجبة، وبما أن منحني الكثافة متناظر بالنسبة لمحور التراتيب يكون:

$$P[Z < -2.33] = P[Z > 2.33]$$
$$P[Z < -2.33] = 1 - P[Z \leq 2.33]$$
$$P[Z < -2.33] = 1 - \Phi(2.33)$$

و بالبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد:

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
2.3				.9901						

فيكون الاحتمال المطلوب:

$$P[Z < -2.33] = 1 - 0.9901$$
$$= 0.0099$$

4-

$$P[-2.01 \leq Z < 1.28] = P[Z < 1.28] - P[Z \leq -2.01]$$
$$P[-2.01 \leq Z < 1.28] = P[Z < 1.28] - P[Z > 2.01]$$
$$P[-2.01 \leq Z < 1.28] = P[Z < 1.28] - 1 + P[Z \leq 2.01]$$
$$P[-2.01 \leq Z < 1.28] = F(1.28) - 1 + F(2.01)$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد:

$$P[-2.01 \leq Z < 1.28] = 0.8997 - 1 + 0.9778 = 0.8775$$

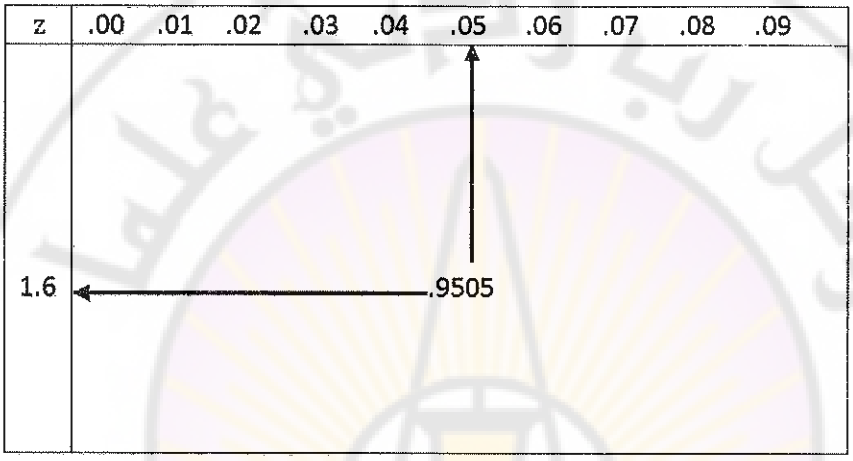
مثال (5):

أوجد قيمة z المحققة للعلاقة:

$$P[Z < z] = 0.9505$$

الحل:

بالبحث في الجدول بطريقة عكسية، أي نبحث عن المساحة 0.9505 نجدها عند تقاطع الصف 1.6، والعمود 0.05



أي أن:

$$z = 1.65$$

مثال (6):

لنفرض أن الدخل السنوي لأسرة ما يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 80 ألف ليرة سورية وتباين 900 ألف ليرة سورية. والمطلوب:

1- أوجد دالة الكثافة الاحتمالية؟

2- ما نسبة الأسر التي يقل دخلها عن 60 ألف ليرة سورية؟

3- ما الدخل الذي أقل منه 0.975 من الدخول ؟

الحل:

بفرض أن X متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي، و يعبر عن الدخل السنوي بالألف ليرة سورية، فإن:

$$E(X) = \mu = 80$$
$$V(X) = \sigma^2 = 900$$

أي أن:

$$x \sim N(80,900)$$

1- دالة الكثافة الاحتمالية:

$$f(x) = \frac{1}{30\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-80}{30}\right)^2}$$
$$-\infty < x < +\infty \quad , \quad \pi = 22/7$$

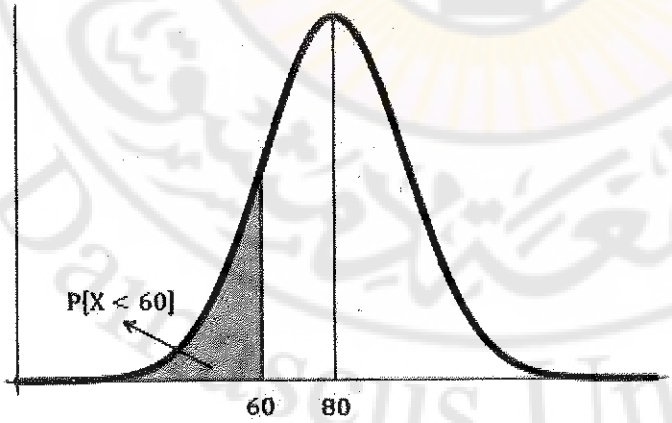
2- نسبة الأسر التي يقل دخلها عن 60 ألف ليرة سورية:

$$P[X < 60] = P\left(z < \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= P\left(z < \frac{60-80}{30}\right)$$
$$= P(z < -0.67)$$
$$= P(z \geq 0.67)$$
$$= 1 - \Phi(0.67)$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري، نجد أن:

$$P[X < 60] = 1 - 0.7486$$
$$= 0.2514$$

والشكل (9-16) يبين أين تقع مساحة هذا الاحتمال:



الشكل (9-16) مساحة الاحتمال

3- الدخل الذي أقل منه 0.975 من الدخول:

بفرض أن x_1 هي قيمة ذلك الدخل و نعينها من العلاقة:

$$P[X < x_1] = P\left(Z < \frac{x_1 - 80}{30}\right) = 0.975$$

وبالكشف بطريقة عكسية، أي يبحث عن المساحة 0.975 نجدها عند تقاطع الصف 1.9، والعمود 0.06 أي أن قيمة: $Z = 1.96$ ، وعليه يكون:

$$1.96 = \frac{x_1 - 80}{30}$$

ومنه:

$$x_1 = 30(1.96) + 80$$
$$= 138.8$$

إذاً الدخل 138.8 ألف ليرة سورية في السنة.

5- توزيع كاي مربع

يعدّ توزيع كاي مربع (Chi – Square Distribution) من أكثر التوزيعات استخداماً في مجال اختبار الفرضيات، ويستخدم كثيراً في تحليل البيانات النوعية، وتحليل التباين.

يمكن تعريفه كما يلي:

لتكن $X_1, X_2, \ldots X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة كل منها تتبع التوزيع الطبيعي المعياري $\mu = 0,\ \sigma = 1$ ، عندئذ المتغير X ، و الذي يساوي:

$$X = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$$

له دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} e^{-\left(\frac{x}{2}\right)} \quad ; 0 < x < +\infty$$

حيث n هي درجة الحرية.

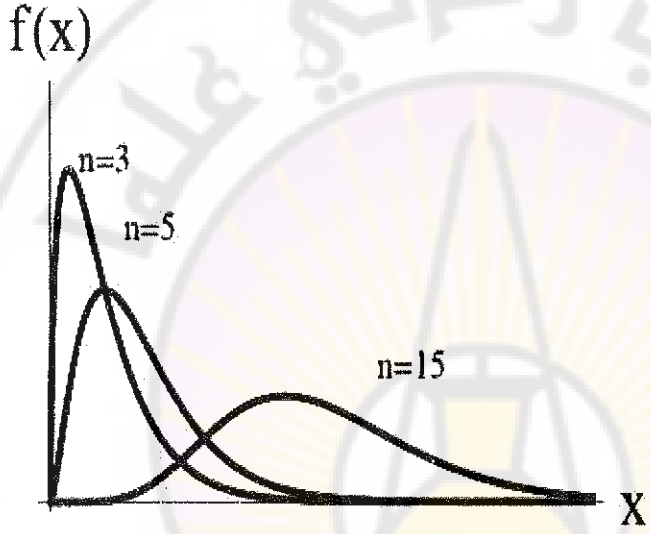
و $\Gamma(z)$ هي دالة غاما حيث:

$$\Gamma(z) = \int_{0}^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$$

عندئذ يكون المتغير X يتبع توزيع كاي مربع بدرجة n من الحرية، و درجة الحرية هنا تعبير خاص يدل على الوسيط n لهذا التوزيع. ونرمز لذلك بالرمز:

$$X \sim \chi_n^2$$

إن شكل المنحني البياني لهذه الدالة هو الشكل (9-17):



الشكل (9-17) منحني دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع مربع كاي

يختلف توزيع كاي مربع عن التوزيع الطبيعي بأنه توزيع غير متناظر أو ملتو (Skewed) وتعتمد درجة التوائه أو شكله على عدد درجات الحرية. فكلما زادت درجات الحرية قلت درجة التوائه، و اقترب من التناظر.

وفي العينات كبيرة الحجم نسبياً يقارب شكله شكل المنحني الطبيعي. وبشكل عام توزيع كاي مربع موجب الالتواء، و قيمه لا يمكن أن تكون سالبة.

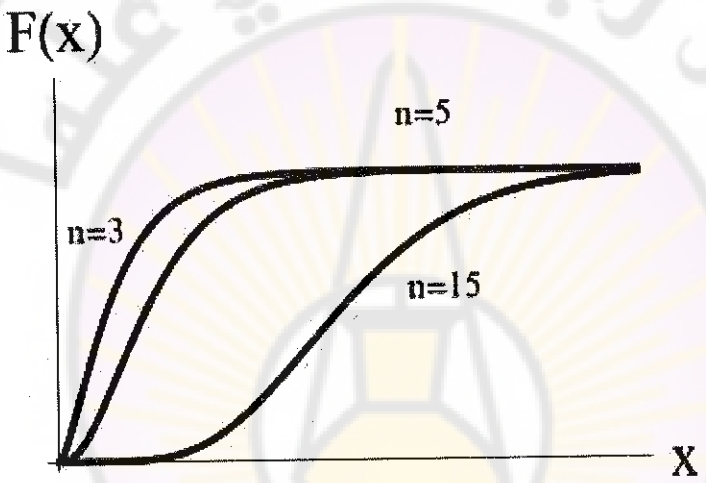
5-1 دالة التوزيع التجميعي لمتغير عشوائي له توزيع كاي مربع

تأخذ دالة التوزيع التجميعي F(x) الشكل التالي:

$$F(x) = P(X \le x) = \frac{\int_0^{\frac{x}{2}} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t} dt}{\int_0^{+\infty} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t} dt}$$

وقد قام الإحصائيون بوضع جداول إحصائية لحساب قيم دالة التوزيع المتجمع لمتغير عشوائي له توزيع كاي مربع.

إن شكل المنحني البياني لهذه الدالة من أجل درجات حرية $n = 3, 5, 15$ هو الشكل(9–18):

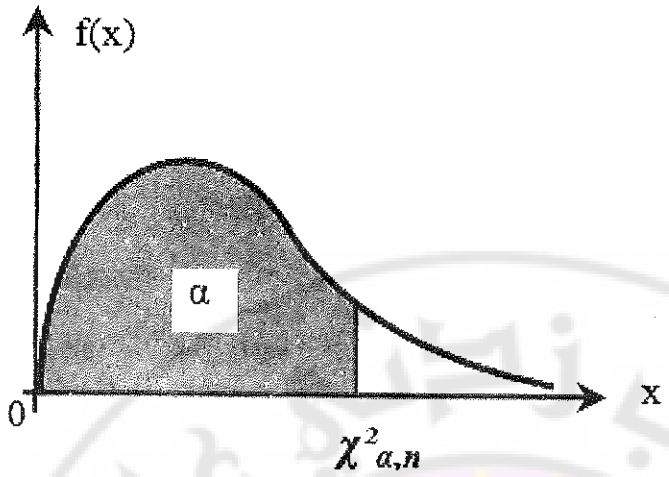


الشكل (9–18) منحني دالة التوزيع لتوزيع كاي مربع من أجل درجات حرية $n = 3, 5, 15$

إذا كان X متغيراً عشوائياً يتبع توزيع كاي مربع بدرجة n من الحرية، فإنه من أجل أي قيمة $\alpha \in [0,1]$، فإن المقدار $\chi^2_{\alpha,n}$ يحقق العلاقة:

$$P\left[X \le \chi^2_{\alpha,n}\right] = \alpha$$

أي أنه من أجل درجة n من الحرية، يوجد α من المساحة الواقعة على يسار $\chi^2_{\alpha,n}$ والمحصورة بمنحن الكثافة ومحور الفواصل كما هو موضح بالشكل (9–19)



الشكل (9-19) المساحة تحت منحني الكثافة و يسار $\chi^2_{\alpha,n}$

5-2 الدالة المولدة للعزوم لمتغير عشوائي له التوزيع كاي مربع

إذا كان X متغيراً عشوائياً له توزيع كاي مربع بدرجة حرية n ، عندئذ:

$$M_X(t) = (1-2t)^{-\frac{n}{2}} \quad , \qquad t < 0.5$$

5-3 التوقع الرياضي لمتغير عشوائي له التوزيع كاي مربع

إذا كان X متغيراً عشوائياً له التوزيع كاي مربع، عندئذ التوقع الرياضي أو المتوسط الحسابي:

$$\mu = E(X) = n$$

5-4 تباين متغير عشوائي له التوزيع كاي مربع

إذا كان X متغيراً عشوائياً له التوزيع كاي مربع، عندئذ:

$$\sigma^2 = 2n$$

5-5 الانحراف المعياري لمتغير عشوائي له توزيع كاي مربع

إذا كان X متغيراً عشوائياً له التوزيع كاي مربع، عندئذ:

$$\sigma = \sqrt{2n}$$

مثال (7):

إذا كان X متغيراً عشوائياً يتوزع وفق توزيع كاي مربع بدرجات حرية 10.

المطلوب:

1- أوجد دالة الكثافة الاحتمالية؟

2- أوجد احتمال: $F(3.94) = P[X \leq 3.94]$؟

3- أوجد قيمة x المحققة للعلاقة: $P[X \leq x] = 0.99$ ؟

الحل:

1- تكتب دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي $X \sim \chi^2_{10}$ بالشكل التالي:

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{10}{2}}\,\Gamma\left(\frac{10}{2}\right)} x^{\left(\frac{10}{2}-1\right)} e^{-\left(\frac{x}{2}\right)} \quad ; \; 0 < x < +\infty$$

2- يتم حساب الاحتمال $F(3.49) = P(X \leq 3.94)$ على الشكل التالي:

$$P[X \leq 3.94] = \int_0^{3.94} f(x)dx$$

$$= \int_0^{3.94} \frac{1}{2^{\frac{10}{2}}\,\Gamma\left(\frac{10}{2}\right)} x^{\left(\frac{10}{2}-1\right)} e^{-\left(\frac{x}{2}\right)} dx$$

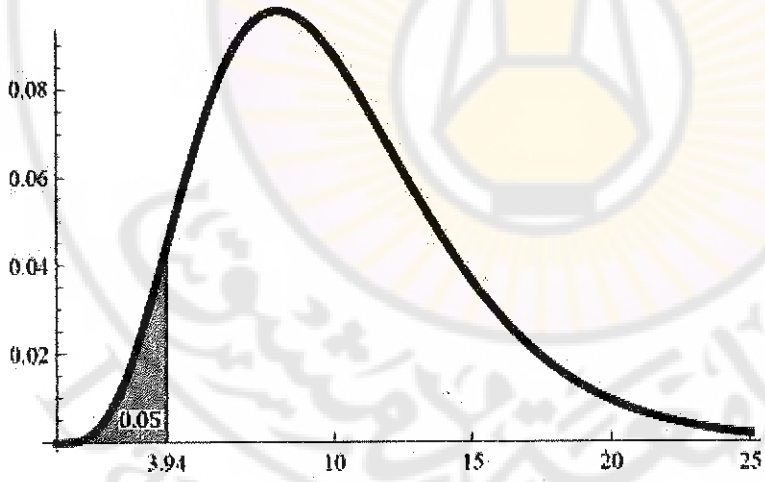
$$= 0.05$$

ويمكن استنتاج قيمة هذا الاحتمال من جدول كاي مربع حيث يتم حساب المساحة الواقعة على يسار القيمة 3.94 والمحصورة بين منحن الكثافة و محور الفواصل. بالبحث في جدول كاي مربع عن السطر الذي يحوي درجة حرية قيمتها 10 وبالبحث ضمن هذا السطر عن القيمة 3.94 عندئذ تكون القيمة المقابلة لها في ترويسة الجدول هي القيمة المطلوبة، كما يلي:

	$\chi^2_{.005}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.050}$	$\chi^2_{.100}$	$\chi^2_{.900}$	$\chi^2_{.950}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.990}$	$\chi^2_{.995}$
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10			3.940						
:									
:									
:									
:									

الشكل (9–20) استنتاج قيمة الاحتمال $P[X \leq 3.94]$ من جدول كاي مربع

كما يظهر الشكل (9–21) احتمال $P[X \leq 3.94]$.



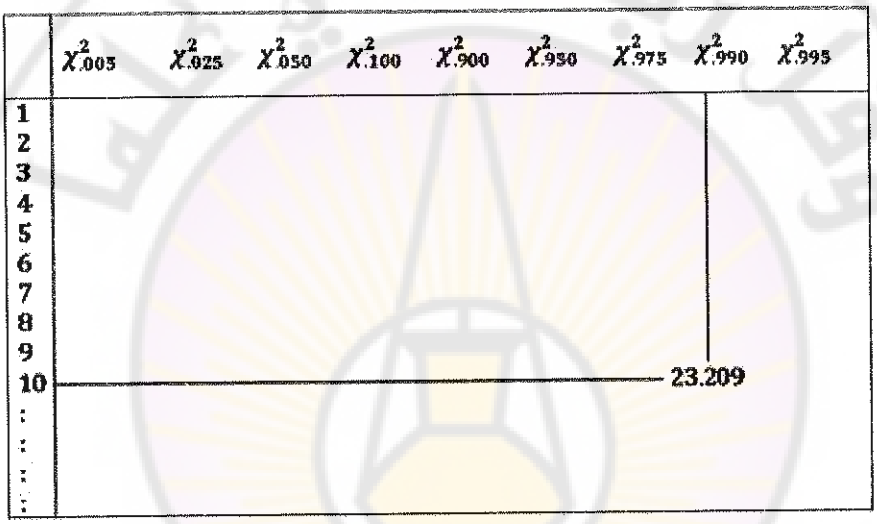
الشكل (9–21) $P(X \leq 3.94) = 0.05$

3– إيجاد قيمة x المحققة للعلاقة $P[X \leq x] = 0.99$:

أي نريد إيجاد قيمة المتغير x الذي أقل منه 0.99 من القيم، أي الذي يقع على يساره 0.99 من المساحة المحصورة بين دالة الكثافة ومحور الفواصل، و بالتالي يجب إيجاد قيمة x التي تحقق:

$$F(x) = P[X \leq x] = 0.99$$

وهذه القيمة نحصل عليها من جدول توزيع كاي مربع من تقاطع السطر الذي درجة حريته تأخذ القيمة 10 و العمود الذي قيمته $\chi^2_{0.990}$ كما في الشكل (9–22) التالي:

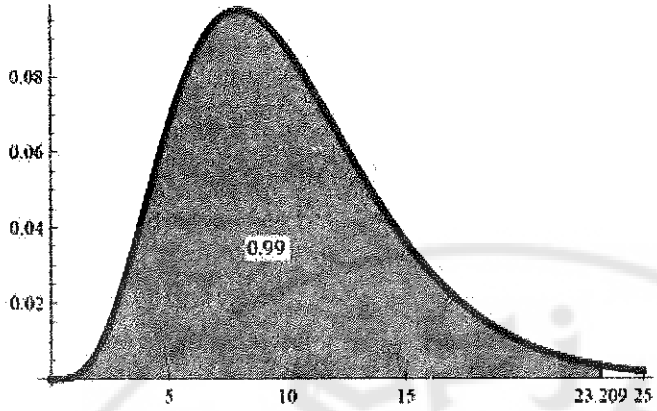


الشكل (9–22) يوضح $P[X \leq x] = 0.99$ المطلوب

أي:

$$x = 23.209$$

كما يظهر الشكل (9–22) احتمال $P[X \leq x] = 0.99$.



الشكل (9-22): $P[X \leq x] = 0.99$

6- توزيع ستيودنت

يستخدم التوزيع الطبيعي للاستدلال على المتوسط الحسابي للمجتمع μ عندما يكون تباين المجتمع σ^2 غير معلوم، أو حجم العينة كبيراً بشكل كاف، وذلك لنتمكن من الاستعاضة عن هذا التباين بتقديره من تباين العينة S^2.

ولكن عندما يكون حجم المجتمع غير معلوم وحجم العينة صغيراً (أي عندما يكون حجم العينة n أقل من30) نستخدم توزيع ستيودنت (Student Distribution).

ليكن U متغيراً عشوائياً له التوزيع الطبيعي المعياري، و ليكن Y متغيراً عشوائياً له توزيع كاي مربع بدرجة n من الحرية، فإذا كان المتغيران U و Y مستقلين، عندئذ يدعى المتغير:

$$T = \frac{U}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

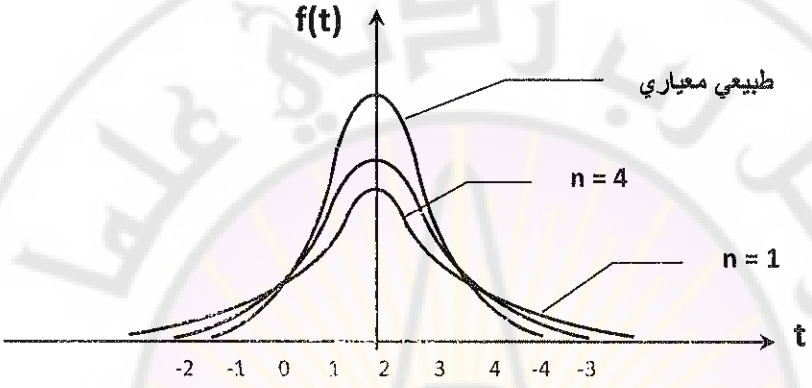
متغيراً عشوائياً له توزيع ستيودنت بدرجة n من الحرية، ونرمز لذلك بالرمز: $T \sim t_n$

و تكون له دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{-(n+1)}{2}} \quad ; -\infty < t < +\infty$$

حيث n هي درجة الحرية.

ويوضح الشكل (9–21) منحني توزيع ستيودنت لدرجات الحرية 1 و 4، حيث يلاحظ اقترابه من منحن التوزيع الطبيعي المعياري بازدياد حجم العينة n.



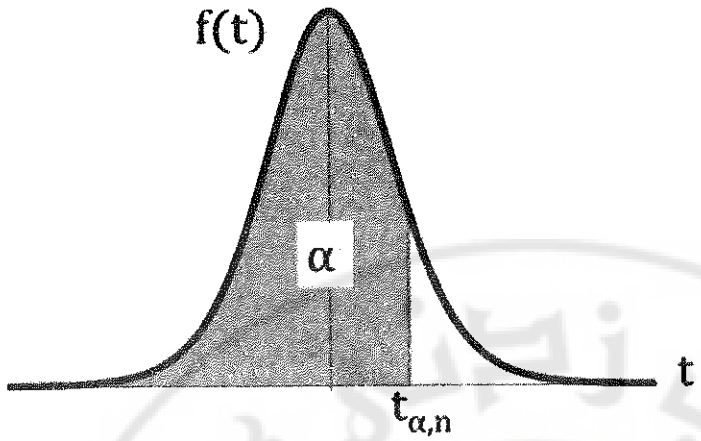
الشكل (9–21) منحني توزيع ستيودنت لدرجات الحرية 1 و 4

ونلاحظ أنه توزيع متناظر حول محور التراتيب، مما يعني أن لكل نقطة موجبة t نقطة سالبة مناظرة لها، حيث المساحة تحت المنحني على يمين t تساوي المساحة تحت المنحني على يسار (t –). ويقترب توزيع ستيودنت من التوزيع الطبيعي كلما زادت درجة الحرية، ويعدّ الإحصائيون التوزيعين متطابقين عندما $n \geq 30$.

إذا كان X متغيراً عشوائياً يتبع توزيع ستيودنت بدرجة n من الحرية، فإنه من أجل أي قيمة $\alpha \in [0,1]$، فإن المقدار $t_{\alpha,n}$ يحقق العلاقة:

$$P[X \leq t_{\alpha,n}] = \alpha$$

أي أنه من أجل درجة n من الحرية، يوجد α من المساحة الواقعة على يسار $t_{\alpha,n}$ والمحصورة بمنحن الكثافة و محور الفواصل كما موضح بالشكل (9–22)



الشكل (9-22) المساحة تحت منحني الكثافة و يسار $t_{\alpha,n}$

وقد قام الإحصائيون بوضع جداول إحصائية لحساب دالة التوزيع التجميعي لمتغير عشوائي له توزيع ستيودنت.

مثال (8):

إذا كان X متغيراً عشوائياً يتوزع وفق توزيع ستيودنت بدرجة حرية 10.

المطلوب:

1- أوجد احتمال: $F(1.372) = P[X \leq 1.372]$؟

2- أوجد قيمة x المحققة للعلاقة: $P[X \leq x] = 0.260$ ؟

الحل:

باستخدام جدول توزيع ستيودنت:

1-

$$F(1.372) = P[X \leq 1.372] = 0.900$$

2- قيمة x المحققة للعلاقة:

$$P[X \leq x] = 0.260$$

هي:

$$x = 0.600$$

6-1 التوقع الرياضي لمتغير عشوائي له توزيع ستيودنت

إذا كان X متغيراً عشوائياً له توزيع ستيودنت، عندئذ التوقع الرياضي أو المتوسط الحسابي:

$$\mu = E(X) = 0$$

6-2 تباين متغير عشوائي له توزيع ستيودنت

إذا كان X متغيراً عشوائياً له توزيع ستيودنت ، عندئذ:

$$\sigma^2 = \frac{n}{n-2}; n > 2$$

6-3 الانحراف المعياري لمتغير عشوائي له توزيع ستيودنت

إذا كان X متغيراً عشوائياً له توزيع ستيودنت، عندئذ:

$$\sigma = \sqrt{\frac{n}{n-2}};\ n > 2$$

تمارين

السؤال الأول:

إذا كان عدد البراكين في السنة متغيراً عشوائياً يتبع تقريباً التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = 20.8$ وانحراف معياري $\sigma = 4.5$.

والمطلوب:

أوجد الاحتمالات التالية:

1- أن يحدث 18 بركاناً في السنة؟

2- أن يحدث على الأكثر 18 بركاناً في السنة؟

3- أن يحدث على الأقل 22 بركاناً في السنة؟

4- أن يحدث ما بين 20 إلى 30 بركاناً في السنة؟

السؤال الثاني:

إذا كانت درجة الحرارة خلال فترة من العام في بلد ما تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = 20^{\circ}C$ ، وانحراف معياري $\sigma = 3^{\circ}C$.

والمطلوب:

أوجد الاحتمالات التالية:

1- أن لا تزيد درجة الحرارة عن $23^{\circ}C$؟

2- أن تكون درجة الحرارة بين $15^{\circ}C$ و$26^{\circ}C$؟

3- أن لا تقل درجة الحرارة عن $20^{\circ}C$؟

4- أن تكون درجة الحرارة $20^{\circ}C$ بالضبط؟

5- ما درجة الحرارة التي تتجاوزها الحرارة في البلد باحتمال مقداره 0.937.

السؤال الثالث

إذا كان في إنتاج إحدى الآلات 30% معيباً. أخذت عينة عشوائية مؤلفة من 120 قطعة.

والمطلوب:

أوجد باستخدام التقريب الطبيعي لثنائي الحدين الاحتمالات التالية:

1- أن يكون 30 وحدة معيبة فقط؟

2- أن يكون 40 وحدة معيبة على الأكثر؟

3- أن يكون 50 وحدة معيبة على الأقل؟

السؤال الرابع:

إذا كان لدينا المتغير العشوائي X الذي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = 80$ وانحراف معياري $\sigma = 4.8$

والمطلوب:

أوجد الاحتمالات التي يأخذها المتغير العشوائي X للقيم التالية:

1- أقل من 87.2 ؟

2- أكبر من 76.4 ؟

3- بين 81.2 و 86.0؟

4- بين 71.6 إلى 88.4؟

السؤال الخامس:

إذا علمت أن درجات طلاب السنة الأولى فيزياء هو متغير عشوائي X، الذي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = 67$ وتباين $\sigma^2 = 64$. اختبر طالب بشكل عشوائي.

والمطلوب:

1- ما احتمال أن تكون درجته بين 65 و 75 ؟

2- إذا كان عدد الطلاب المسجلين بقسم الفيزياء يساوي 600 طالب، أوجد عدد الطلاب الذين تزيد درجاتهم عن 60 درجة.

السؤال السادس:

إذا كان لدينا المتغير العشوائي Z الذي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري.

والمطلوب:

أوجد الاحتمالات التي يأخذها المتغير العشوائي Z للقيم التالية:

1- أكبر من 1.24 ؟

2- أقل من 0.46 ؟

3- ما بين 0.36 و 0.23 ؟

السؤال السابع:

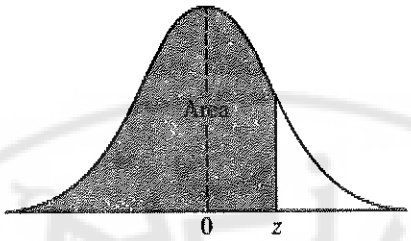
تعتمد إحدى الشركات الكبرى على شبكة الانترنت في عملية الحصول على المعلومات المتعلقة ببعض العمليات التجارية التي تقوم بها. بافتراض أن الوقت المستغرق بالدقائق في عملية الحصول على المعلومة المعنية من خلال شبكة الانترنت متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = 45$ دقيقة وانحراف معياري $\sigma = 18$ دقيقة. فإذا رغب أحد العاملين في الشركة استخدام الشبكة للحصول على معلومة معينة.

فالمطلوب:

أوجد احتمال أن يستغرق أكثر من 40 دقيقة.

ملحق (1)

جدول (1) جدول التوزيع الطبيعي المعياري المتجمع



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999							

ملحق (2)

جدول (2) جدول توزيع كاي مربع

df	$\chi^2_{.005}$	$\chi^2_{.010}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.050}$	$\chi^2_{.100}$	$\chi^2_{.900}$	$\chi^2_{.950}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.990}$	$\chi^2_{.995}$
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952

ملحق (3)

جدول (3) جدول توزيع ستيودنت

df	p 0.600	0.750	0.800	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.9990	0.9995
1	0.325	1.000	1.376	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.3	636.6
2	0.289	0.816	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.33	31.60
3	0.277	0.765	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.21	12.92
4	0.271	0.741	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.267	0.727	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.894	6.869
6	0.265	0.718	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.263	0.711	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.262	0.706	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.261	0.703	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.260	0.700	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.260	0.697	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.259	0.695	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.259	0.694	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.258	0.692	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.258	0.691	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.258	0.690	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.257	0.689	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.257	0.688	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.257	0.688	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.257	0.687	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.257	0.686	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.256	0.686	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.256	0.685	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	0.256	0.685	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.256	0.684	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.256	0.684	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.256	0.684	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.689
28	0.256	0.683	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.256	0.683	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.660
30	0.256	0.683	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
31	0.256	0.682	0.853	1.309	1.696	2.040	2.453	2.744	3.375	3.633
32	0.255	0.682	0.853	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365	3.622
33	0.255	0.682	0.853	1.308	1.692	2.035	2.445	2.733	3.356	3.611
34	0.255	0.682	0.852	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348	3.601
35	0.255	0.682	0.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340	3.591
36	0.255	0.681	0.852	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333	3.582
37	0.255	0.681	0.851	1.305	1.687	2.026	2.431	2.715	3.326	3.574
38	0.255	0.681	0.851	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319	3.566
39	0.255	0.681	0.851	1.304	1.685	2.023	2.426	2.708	3.313	3.558
40	0.255	0.681	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
50	0.255	0.679	0.849	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261	3.496
60	0.254	0.679	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
70	0.254	0.678	0.847	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.211	3.435
80	0.254	0.678	0.846	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
90	0.254	0.677	0.846	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	3.183	3.402
100	0.254	0.677	0.845	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390
120	0.254	0.677	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
160	0.254	0.676	0.844	1.287	1.654	1.975	2.350	2.607	3.142	3.352
200	0.254	0.676	0.843	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601	3.131	3.340
240	0.254	0.676	0.843	1.285	1.651	1.970	2.342	2.596	3.125	3.332
300	0.254	0.675	0.843	1.284	1.650	1.968	2.339	2.592	3.118	3.323
400	0.254	0.675	0.843	1.284	1.649	1.966	2.336	2.588	3.111	3.315
∞	0.253	0.674	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.290

المصطلحات العلمية

Addition	جمع
Adjoint Matrix	مصفوفة ملحقة
Arrangements	تراتيب
Augmented Matrix	مصفوفة موسعة
Certain Event	حدث أكيد
Central Tendency	نزعة مركزية
Characteristic Polynomial	حدودية مميزة
Cofactor	عامل مرافق
Cofactor Matrix	مصفوفة مرافقة
Column	عمود
Complement Event	حدث متمم
Combinations	توافيق
Combination	توفيقة
Conditional Probability	احتمال شرطي
Consistent	متماسكة
Conjugate of a Matrix	مرافق مصفوفة
Counting Methods	طرق العدّ

Continuous Variables	متغير مستمر
Cumulative Frequency	تكرار متجمع
Countably	قابل للعدّ
degenerate	متردية
Determinant	محدد
Diagonalization	تقطير
Diagonal Matrix	مصفوفة قطرية
Dispersion	التشتت
Deviation	الانحراف
Discrete	متصل (متقطع)
Echelon Matrix	مصفوفة مدرجة
Eigenvalue	قيمة ذاتية
Eigenvector	شعاع ذاتي
Elementary Event	حدث ابتدائي
Event	حدث
Empty Event	حدث مستحيل
Elementary Column Operations	تحويلات أولية عمودية
Elementary Row Operation	تحويلات أولية سطرية
Exponential Distribution	توزيع أسي

Finite	منته
Frequency Distribution	توزيع تكراري
Inconsistent	غير متماسكة
Independent Event	حدث مستقل
Identity Matrix	مصفوفة واحدية
Infinite	غير منته
Intersection	تقاطع
Hermitian Matrix	مصفوفة هرميتية
Homogeneous	متجانسة
Kurtosis	تفرطح
Linear Dependence Equations	معادلات مرتبطة خطياً
Linear Equation	معادلة خطية
Linear Independence	معادلات مستقلة خطياً
Lower Triangular Matrix	مصفوفة مثلثية دنيا
Matrix	مصفوفة
Matrix Powers	قوى مصفوفة
Matrix Inverse	مقلوب مصفوفة
Mean	الوسط الحسابي
Median	الوسيط الحسابي

Mean Deviation	الانحراف الحسابي
Measure	مقياس
Minimum Polynomial	الحدودية الأصغرية
Mode	المنوال
Multiplication	جداء
Mutually Exclusive	متنافية
Nondegenerate	غير متردية
Normal Distribution	توزيع طبيعي
Orthogonal Matrix	مصفوفة متعامدة
Partitioned Matrix	تجزئة مصفوفة
Percentage Frequency	تكرار مئوي
Permutation	تباديل
Probability	احتمال
Probability Density	الكثافة الاحتمالية
Polynomial of Matrix	كثيرة حدود مصفوفة
Powers of Diagonalizable Matrix	قوى مصفوفة قطورة
Qualitative	وصفي
Quantitative	كمي

Random Experiment	تجربة عشوائية
Rank of Matrix	رتبة مصفوفة
Range	المدى
Random Variable	متغير عشوائي
Reduced Echelon Matrix	مصفوفة مدرجة مختزلة
Relative Frequency	التكرار النسبي
Row	سطر
Sample	عينة
Sample Point	نقطة عينة
Similar Matrix	مصفوفة متشابهة
Singular	شاذة
Smoothed Frequency	التكرار الممهد
Space	فضاء
Square matrix	مصفوفة مربعة
Standard Distribution	توزيع معياري
Statistics	علم الإحصاء
Subset	مجموعة جزئية
Subtraction	طرح
Skewness	التواء

Skew Hermitian Matrix	مصفوفة هرميتية متخالفة
Skew-Symmetric Matrix	مصفوفة متناظرة متخالفة
Symmetric Matrix	مصفوفة متناظرة
Submatrix	مصفوفة جزئية
Trace of Matrix	أثر مصفوفة
Transpose Matrix	منقول مصفوفة
Triangular Matrix	مصفوفة مثلثية
Variance	التباين
Uniform distribution	توزيع منتظم
Union	اتحاد
Upper Triangular Matrix	مصفوفة مثلثية عليا
Zero Matrix	مصفوفة صفرية

مراجع العلمية

المراجع الأجنبية:

- Serge Lang, "*Introduction to Linear Algebra* ", Second Edition, Springer, 2012.
- David C. Lay, " *Linear Algebra and its Applications*", Fourth Edition, Addison-Wesley, 2011.
- Gilbert Strang, "*Introduction to Linear Algebra* ", Fourth Edition, Wellesley-Cambridge Press, 2009.
- Jim Defranza, Daniel Gagliardi, "*Introduction to Linear Algebra with Applications*", The McGraw-Hill Companies, 2008.
- Gilbert Strang, "*Linear Algebra and its Applications*", Fourth Edition, Brook Cole, 2005.
- A.N. Kolmogorov."*Foundations of The Theory of Probability*", Chelsea Publishing Company, New York,1988.
- Gilbert Strang, "*Probability and Statistics for Engineers and Scientists*", Fourth Edition, Elsevier, 2009.

المراجع العربية:

- د. يوسف الوادي، أ. هدى الشماط. "الرياضيات العامة (1)"، منشورات جامعة دمشق 2009.
- د. إيلي قدسي. "الجبر الخطي (2)"، منشورات جامعة دمشق 2007.
- د. عبد اللطيف هنانو. "الجبر الخطي (1)"، منشورات جامعة دمشق 2006.
- د. عبد الواحد أبو حمدة، د. أنور اللحام، د. يوسف الوادي، د. عبد اللطيف هنانو. "الجبر الخطي جبر(4) "، منشورات جامعة دمشق 2005.

- د. أنور اللحام. "مبادئ الإحصاء والجبر الخطي"، منشورات جامعة دمشق 1986.
- د الهام الحمصي. "الجبر الخطي (1)"، منشورات جامعة دمشق 1982.
- د. عبدالله الشيحة. "مبادئ الإحصاء والاحتمالات"، 101 إحصاء.
- أ.د .أماني موسى محمد." التحليل الإحصائي للبيانات"، مركز تطوير الدراسات العليا والبحوث – آلية الهندسة – جامعة القاهرة،2007.
- د. علي جمعة. "مدخل إلى علم الإحصاء"، دبلوم التسويق والمحاسبة، 1427-1428هـ.
- د. خالد زهري خواجة. "أساسيات الاحتمالات"، المعهد العربي للتدريب والبحوث الإحصائية.
- د. محمود الدريني."التوزيعات الاحتمالية الخاصة"، 2013.
- د.محمد صبح "مبادئ الإحصاء و الاحتمال"، منشورات جامعة دمشق 1989.
- د.عزات قاسم "مبادئ الاحتمالات و الإحصاء"، منشورات جامعة دمشق 1995.

التدقيق العلمي

أ.د. محمد صبح أ. م.د. عزات قاسم أ.م.د.عبد اللطيف هنانو

التدقيق اللغوي

د. دياب راشد